动态数理微课程(I)

姜平 邱发文

2016 年 1 月 22 日

目录

第1节　软件入门

1.1　常见功能

我们这个课程主要是依托几何画板为基础,对一些数理综合问题做些简单的探索.那么我们首先得对这个软件有一定的了解.
这个软件其实非常好上手,可以参考好多现有的教程,甚至可以直接尝试做一些问题,边用边学.我们简单的做一些介绍.

打开一个几何画板文件,左边有一列操作按钮,其中一部分是构造功能的,直接选中工具就可以做出点,圆,线,多边形.这里都是常用的构造,其他的构造功能可以通过构造菜单中 的选项实现,画板中一般都符合先选择构造对象再进行构造的顺序.我们比如我们要构造一个线段的中点,那么我们可以选中一条线段,然后选择构造,中点,就可以得到中点.其实用的 熟练的话我们可以利用快捷键和程序的默认效果来解决一些问题.
比如我们要解决一个任意对边形每次取中点构造出另一个多边形,反复循环下去的效果我们就可以这样操作.

作法

1.我们用选择多边形的工具(只要边的那种,长按多边形工具选择第三个.)给出一个多边形,最后一个点双击.

2.在操作刚刚完成的时候,边是在选中状态,我们用快捷键Ctrl + M就产生了各边的中点.继续用快捷键Ctrl + L就产生了一个新的多边形,也就是中点多边形.

3.反复下去,很快就得到了这个中点多边形.

关于这个多边形Qiusir曾经发表过一个描述.

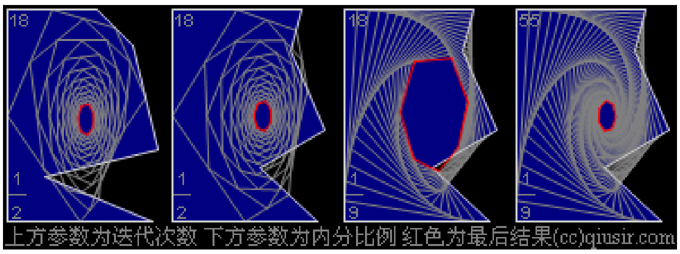

图 1.1: 求师得博客截图

多边形的任意性对应初始条件的大差异,而经过多次迭代后的结果却是趋同的,如同人的先天差异可以通过后天努力弥补一样.教育过程中的重复过程不仅不可缺少,其导致不同初始条件的趋同也是必然了.而内分比例的不同如同三百六十行行行出状元,不过这里有为成功付出代价不同的区别.”上帝”表面上有所偏心地给了不同人不同的外在,却悄悄地赋予每个人相同的努力结果.而生活中的确经常可以看到不同的人有类似成功的现象.看来人的差距并不在于初始的差异,外表的差异大多是暂时的.而最后结果的不同更多取决于中间过程的”迭代”次数,这也是”初衷不改”的耐力了. 或许还可以得到这样的启发,眼下所强调的”个性发展”并不是追求表面的炯同,而是鼓励自我的”不懈迭代”,再大的个性差异的”真正发展”的结果同样是趋同的,所谓”条条大路通罗马”. 实现成功的方法各异,而所追求的结果最终相同;成功道路的远近是表面的,关键要选择一条能够坚持下去的道路,而长途跋涉仅仅需要毅力是不够的,还需乐趣相伴.而前进的”迭代过程”一方面提醒”坚持才能改变”,同时也告诫要把持”改变才能不变”的尺度.

从这个例子我们可以看出来,操作技巧是只是一个侧面,另一面要积累经验.

除了构造对象之外,我们最常用的还有变换菜单,变换中用到一个操作技巧就是双击,比如要将A点以B点为中心放缩$\frac{1}{2}$, 我们可以双击B点,选择A点,从菜单中选择缩放,就会弹出对话框,然后输入$\frac{1}{2}$,确定即可.这个标记的过程就可以通过双击实现.

还有常用的属性,往往通过右键就能够解决.比如新建参数,坐标系,更改坐标系的表格都可以从右键菜单中得到.

当然更多的操作还是依赖菜单来解决,度量菜单中往往能解决一些长度,角度的度量.比例的计算等等.这些操作凭经验就可以解决,不过也要注意操作顺序,比如度量角的时候,我们依次 点选A,B,C度量出来就得到角度$\angle ABC$,点选C,B,A就会得到角度$\angle CBA$,这两个度数相同,但是如果我们选择右键,参数选项,单位选项卡中的方向度,就发现这两个度数变成了相反数.应用的时候就要注意区别.

还有其他例子,比如给出一条直线A,B和其上一点C,我们依次点选A,B,C,用度量,比的工具就会得到$\frac{AC}{AB}$.是不是和你想的不一样啊!很多人会以为是$\frac{AC}{CB}$或者别的组合吧,所以还要细心啊!

我们再来看看另外两个常用的菜单,数据菜单和绘图菜单.
数据菜单中,主要有新建参数,新建函数,制表和定义导函数的功能,其中新建参数或者新建函数都是比较容易的. 关于制表其实相当于抽样侦测,我们通过一个例子进行说明.

作法

1.绘制一个点A,右键单击这个点,给出横纵坐标.

2.此时由于坐标的给出,连带会自然产生坐标系和网格,隐藏网格.

3.点选x_A, y_A,利用数据菜单制表.

4.点选表格,利用菜单添加数据(或者使用右键).弹出的对话框中我们能看到两个选项,一个是添加一个新条目,另一个是当数值改变时添加,其中还给出参数可以改变添加数目 和添加的间隔时间,我们选择第二种方式.

5.选择之后我们用鼠标移动点,每隔一秒就会记录一个位置的坐标,自动的添加到了表格中.

6.记录完成后,可以使用绘制表格中的点来把表格中的数据都给作出来.绘制出来的点和和表格已经脱离关联关系了,此时删除表格,点依然存在,这其实是一个损失,在很多类似 软件中,这个都是关联的. ■

导函数功能也很强大,我们给出一个函数,直接就可以得出相应的导函数,甚至包含一些比较奇怪的函数也可以我就试过$f(x) = x^x$等等.大家可以自己体验一下.
还有一个功能叫定义绘图函数.这是一个很神奇的功能.

作法

1.首先在工具栏中选取标记工具,随意在画板中绘制一条曲线,这应该是一个图片形式.

2.点选图片,利用数据菜单定义绘图函数,会出现一个函数$f(x)$: 绘图1

3.选择这个函数,绘制图象,我们发现得到了一个函数图象基本和绘制的图片重合,只是更加的光滑.

4.缩放原图片或改变原图片的位置,函数也随之发生变化. ■

我们发现其实这个功能已经把刚刚我们绘制的图象转化成了一个函数. 当然我们绘制的一定是一个函数才可以,比如我们绘制一个圆(当然很难画圆,象征一下就行),重复刚才的操作, 就会发现不同.

Gsp v5.0发布的时候就用这个功能作了一个演示,绘制一条曲线,然后函数化,然后计算其积分.效果还是很震撼的啊!
绘图菜单中我们重点说定义坐标系和标记坐标系.

作法

1.右键建立坐标系.
2.在平面内给出一个点A,点选A,利用绘图菜单,定义原点,这时会出现提示框,说您已经有一个坐标系,是否还构建一个坐标系,点击确定.
3.在这个坐标系内绘制一个函数$f(x)=x^2$图象.
4.点选原坐标系的原点,通过绘图菜单标记坐标系,这样切换回原来的坐标系.在这个坐标系中绘制$f(x)=x^2$的图象. ■

这些功能如果利用巧妙的话都能构造非常精彩的效果.例如用这个实现图象的平移变换就很容易.完全可以自己体会一下.其实众多的软件中,几何画板的流行程度是在中学 教师层中是最为广泛的,主要是操作便捷容易入手.所以大家要大胆尝试,边用边学,应该很快无师自通的.

1.2 拓展作业

1.制作一个三角形内角和是180°的课件.
2.制作一个验证梅涅劳斯定理的课件.
3.尝试利用两种方法画出$f(x)=x^2-2x+3(x\in[-1,3])$的图象以及其导函数的图象.
4.制作一个由$f(x)=x^2$平移变换到$f(x)=(x-a)^2$的效果.

第2节　梯子问题-轨迹构造

2.1　任务描述

所谓梯子问题,是一个著名的轨迹假想实验,我们想象一个靠墙而立的梯子(一端靠在墙上,一端支在地上), 这个梯子某横上挂着一个油漆桶,当梯子顺墙滑落的时候,油漆桶的 轨迹?

2.2　技术支持

这个问题主要是依赖轨迹的构造,这只要同时选中控制轨迹运动的自由点和要构造轨迹的点,然后点选构造轨迹就可以了.

如何去让一个梯子顺墙滑倒呢?

首先我们把这个问题转化为数学描述:已知一条线段AB,A在x轴正半轴上运动,B在y轴正半轴上运动.且保证线段AB的长度为d(定值). 那么这个问题似乎并不困难.首先作出x, y轴正半轴两条射线,作出x轴上的自由点A点,给定一条线段MN,其长度为d,然后以A为圆心,MN为半径画圆与y轴正半轴 的交点即为B.如图2.1 接下来就只要作出中点,构造轨迹就可以了!

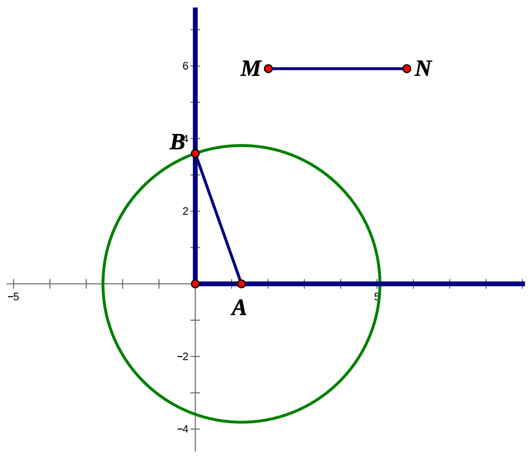

图 2.1: 梯子问题

这只是简单的实现了梯子问题,即没有推广,也不够智慧.后来又聪明学生解决了这个问题.把这个梯子“解放”到坐标系所有象限中,而且也不用硬性的交点来保证定长了.

2.3 具体做法

作法

1.新建一个画板文件,右键方形网格给出坐标系.

2.在坐标系中以原点O为圆心画出一个圆.并在其上任取一个点A.连接AO并取中点B.

3.过B作作y轴的平行线l,将线段OA关于l对称.这样就很快就得到一个靠在坐标系中的梯子.

4.标记中点,构造轨迹即可.如图2.2 ■

这里主要运用了一个几何性质就轻松的完成了这个工作.将知识与技术完美的融合为一体了. 其实完成了这个工作,探索还远远没有完成.

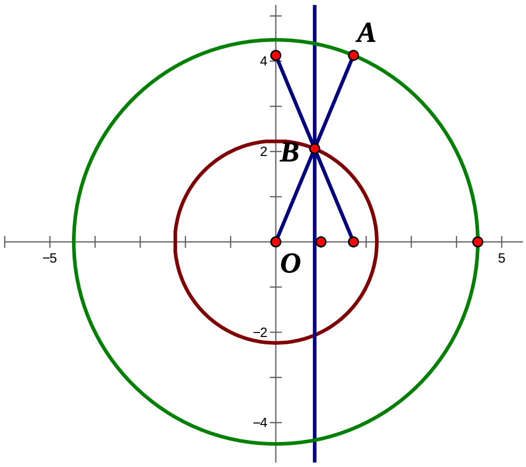

图 2.2: 梯子问题

比如我们可以把中点推广到任意一点,我们可以利用刚才的结果.

作法

1.新建一个画板文件,右键方形网格给出坐标系.

2.在坐标系中以原点O为圆心画出一个圆.并在其上任取一个点A.连接AO并取中点B.

3.过B作y轴的平行线l,将线段OA关于l对称.这样就很快就得到一个靠在坐标系中的梯子.

4.隐藏多余的点和线,只留下点A和"梯子".用点工具在"梯子"上任取一个点C,这样就得到了梯子上任意一点.

5.构造这个C点关于A的轨迹.得到一个椭圆.尝试拖动C点,会发现这个轨迹随之发生变化. ■

我们还可以做很多的研究,比如处于好奇,我们不去做那个点的轨迹,而是作出线段的轨迹,这样就形成了一个包络,如图2.3.或者我们把梯子和A点形成的三角形 $A'O'A$的重心.追踪这个重心的轨迹就居然得到一个圆,如图2.4.这个几何性质是不是很神奇!我们还可以继续这个研究,看你还能有什么发现.

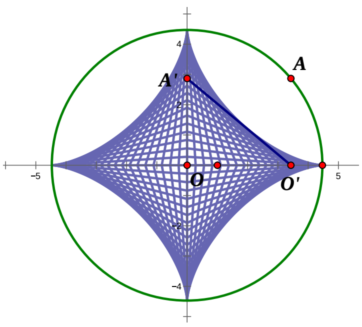

图 2.3: 梯子包络

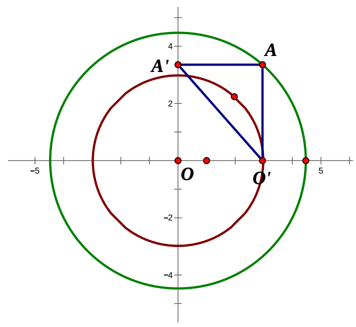

图 2.4: 重心轨迹

2.4　拓展作业

1.梯子问题中的三角形$A'O'A$的垂心,外心,内心构造出来,并且描绘其轨迹.

2.将坐标轴换为两条相交直线(非直角坐标),利用梯子问题的做法(依然按照垂直时构造,只这时的梯子端点不一定保证在两条直线上了),观察轨迹的变化情况.

3.将这个定长线段问题推广到圆锥曲线上的定长线段中点轨迹问题.

第3节　李萨如图-空间初步

3.1　任务描述

二维的Lissajous曲线,按照数学定义是

$$\begin{cases} x &= a\sin(\theta) \\ y &= b\sin(n\theta+\varphi) \end{cases} \tag{1}$$

其中$n \geqslant 1, \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 如果换成是几何描述的话,就是两个简谐振动的交叉.如图3.1, 我们简单描述一下这个做法:

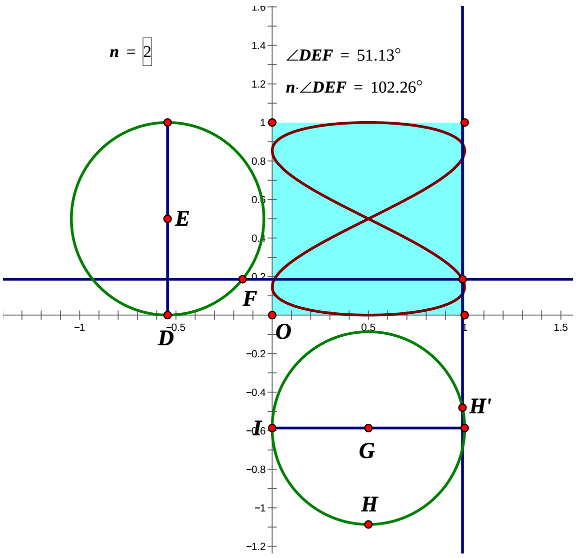

图 3.1: 简谐振动叠加

作法 1.建立坐标系,拉大单位1点,在第一象限内画出过$(0,0),(1,0),(1,1),(0,1)$四个点的正方形,作为我们显示Lissajous图的区域.

2.在第四象限和第二象限化出两条长度为1的线段,并以这个线段为直径画出两个圆$\odot E$和$\odot G$.

3.给出第二象限的圆$\odot E$上任意一点F,度量圆周角$\angle DEF$,并将角度单位改为方向角.

4.给出参数n,赋值为2,计算$n\cdot\angle DEF$,并在$\odot G$中将G正下方的圆上的点H,按照$n\cdot\angle DEF$旋转至H'点.

5.过F, H'分别作各自直径的垂线交于一点,这个交点关于F的轨迹就是Lissajous图. ■

当然如果使用代数方法是比较容易的.

作法

1.新建两个函数$f(x) = \sin(x), g(x) = \sin(2x)$.
2.运用菜单绘制,绘制参数曲线,然后点选$f(x), g(x)$,并给出范围$(0, 2\pi)$.
3.很多时候即使是标记了参数范围也只能得到一小段曲线,那么可以拖动曲线上的箭头把曲线显示完整. ■

这个效果和示波器的显示是很一致的.我们今天要完成的Lissajous图要比这个稍微复杂一些,我我们要完成的是一个空间的Lissajous图. 拿个具体的方程来说我们要完成一条空间曲线的绘制,他的方程为

$$\begin{cases} x &= \cos(5\theta) \\ y &= \sin(3\theta) \\ z &= \sin(\theta) \end{cases}$$

其中$\theta \in [0, 2\pi]$

3.2 技术支持

这个工作要有一个三维坐标系的支持.
我们这里不给出三维坐标系的制作,而直接给出一个三维坐标系应用.
打开立体几何工具文件.这个工具的开发者提供了很多的功能,我们只是利用其中一小部分,如果深入研究可以参考作者给出的相关说明.
我们主要是要在坐标系中描绘一个点,比如$(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4})$.

作法 1.双击点O作为放缩中心,点选坐标系中的x点,按照$\frac{1}{2}$进行放缩,得到x',同样放缩出y', z'点.
2.过x'作Oy的平行线, 过过y'作Ox的平行线,作出两条线的交点设为A.
3.标记向量Oz',按照这个向量平移得到A'.A'点即为所求. ■

这样我们就能得到坐标系中的单点了.理论上讲只要提供单点就可以把多面体构造出来.

但是这样构造的多面体的面和线都没有虚实效果,其实是伪$3D$.不过这里我们就不再苛求细节,入门操作为主.

3.3 具体做法

作法 1.打开三维坐标系统文件,在编辑菜单中选"参数",在打开的对话框中将角度的度量单位改为弧度(因为本次作图的函数中涉及三角函数).

2.定义好三个函数

$$f(x) = \cos 5x$$
$$g(x) = \sin 3x$$
$$h(x) = \sin x$$

并给出一个通过圆给出的角度$\angle ABC$,将其标记改为t.

计算$f(t), g(t), h(t)$.

如图3.2所示.

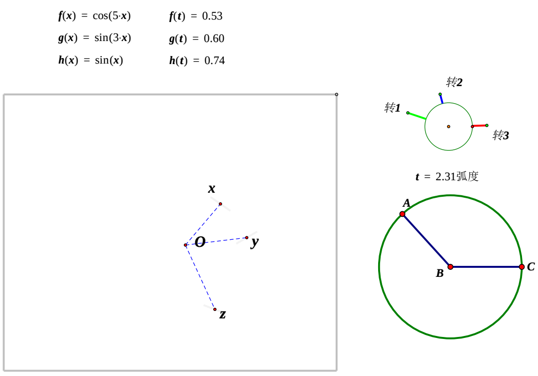

图 3.2: 准备步骤

3.标记三为坐标的中心O,将X,Y,Z按照放缩$f(t),g(t),h(t)$,得到X',Y',Z'

过X'做OY的平行线与过Y'做OX的平行线,交于点D.

将D点按照向量OZ'平移,得到一个点D'.

效果如图3.3所示.

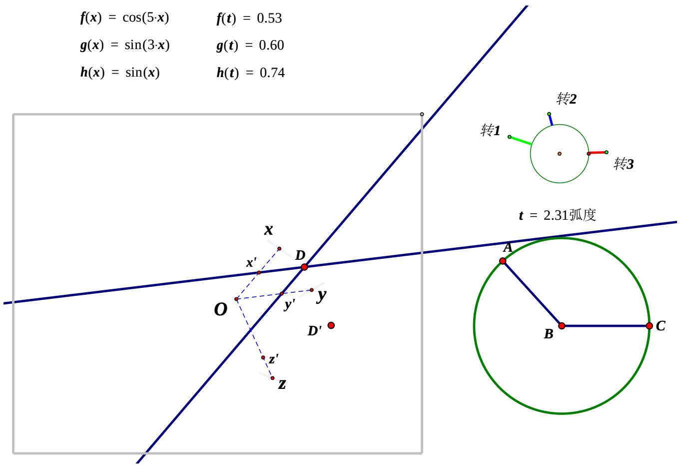

图 3.3: 描绘空间点

作关于A的D'的轨迹就可以了,隐藏不必要点.主要的轨迹就完成了! ■

简单转动一下,看看立体效果,整体应该还不错,但是实际上可能缺少参照立方体所以感觉立体感不强,我们再加上一些辅助的措施.

我们可以将$h(x)$修改为$h(x)=0$的话,观察一下得到的结果如图3.4所示. . 明白了原理我们可以继续Lissajous图的制作.

作法

4.首先将$h(x)$改回到$h(x)=\sin(x)$.

5.在坐标系中绘制出$(1,1,1)$点,并利用这个点对称作出以O为中心,2为棱长的正方体.(这个步骤实现的方法有很多,主要是靠平移旋转等变换来完

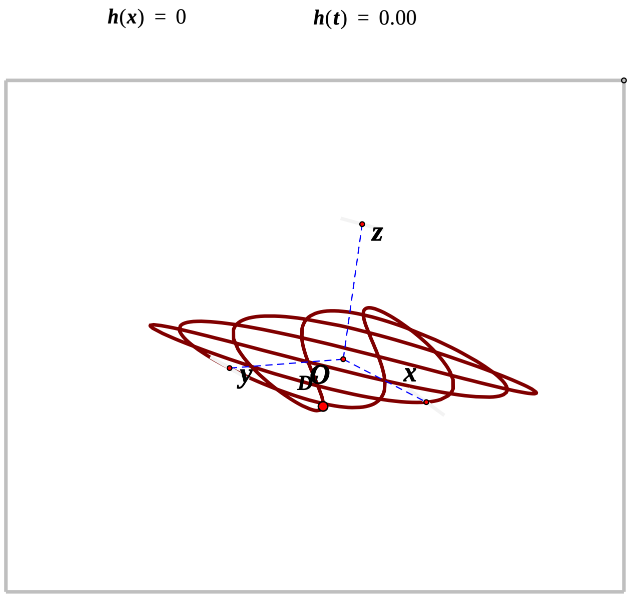

图 3.4: xoy面上投影

成,就不在赘述.)

6.右键显示所有隐藏,这时屏幕上比较乱,选中D点,再用快捷键**Ctrl + H**将显示出来的点线隐藏.这样就找出了被隐藏的D点.这个方法其实是个反向选择的技巧,很有用的.

7.标记向量ZO,将D平移,得到D'(这里系统自动命名为D')其实不是刚才的D',这个D'是平移到正方体底面上的,而并非空间中的.作这个新产生的点的轨迹,改成虚线.并连接两个D',象征对应关系.

如图3.5所示. . 8.点选z点,右键,显示属性,出现的对话框中的对象选项卡下的子对象中找到z'点,这时自动切换到了z'点的属性,将z'点的隐藏复选框勾去,以显示出z'点,这是另一个反向选择的 技巧.大家自己适当选择应用.

9.同前方法找到x',利用x', z'两个点,将这个面内的投影点作出,设为M,将M按照yO向量平移,得到M',M'关于点A的轨迹就是另一个面内的投影,依然改为

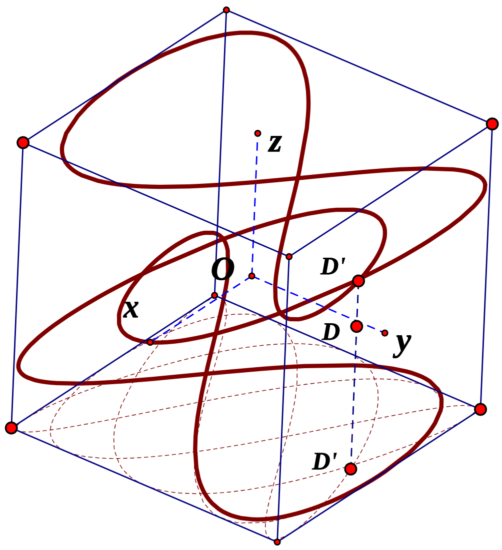

图 3.5: 正方体面上投影

极细虚线.

10.同样方法作出剩余投影面上的投影,隐藏多余的曲线和点,就完成了.

如图3.6所示. ■

3.4　拓展作业

1.利用参数法绘制椭圆的参数方程.
2.制作一个空间的Lissajous图(即重复课上的过程).
3.尝试用恰当的方法表示一个简单的曲面Mobius带(莫比乌斯带).

$$\begin{cases} x(t,v) & = r(t,v)\cos t \\ y(t,v) & = r(t,v)\sin t \\ z(t,v) & = bv\sin\frac{t}{2} \end{cases} \tag{2}$$

其中,$r(t,v)a+bv\cos\frac{t}{2}, v\in[-1,1], t\in[0,2\pi]$

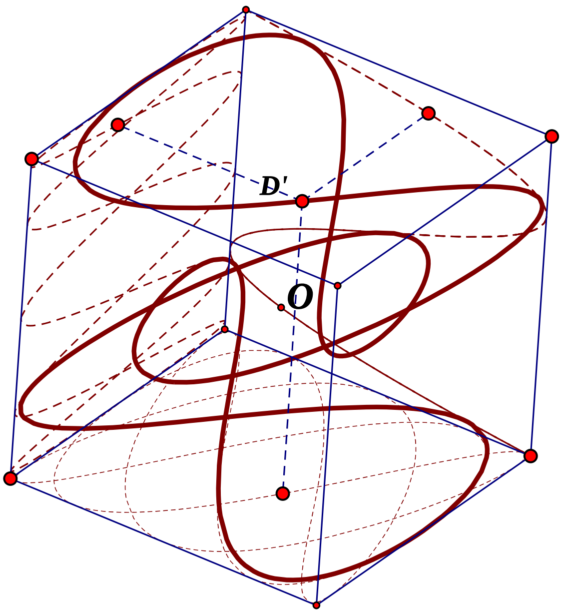

图 3.6: Lissajous图

索引