## 李萨如图-空间初步 谢卓庭

李萨如图是两个振动的叠加,作图思路就是在第二、三两个象限内作出两个 圆,构造出振动,然后将两个振动叠加,在第一象限内绘出轨迹。



这节课的主要任务是在一个三维空间里 进行的,那么就需要一个空间直角坐标系。 这个工具的制作非常麻烦,所以直接给出。 几何画板终究还是在平面上操作,这个"空 间"也只是看起来像空间,实际上是个伪空 间。

在这个坐标中, Ox, Oy, Oz 分别为 x 轴,



y 轴, z 轴单位长度。在这个坐标系中绘制点, 需要对 x, y, z 轴上的单位长度进行缩放, 然后用作平行线和平移的方法绘出点。

现在给出了要做出的曲线的方程,角可以在圆上作, 方便控制。需要注意的是,在参数选项中角的单位要改为 弧度或方向度,保证定义域是  $2\pi$ 。用刚才说到的方法做 出点 D(cos(5 $\theta$ ),sin(3 $\theta$ ),sin $\theta$ )。这里需要通过计算 来确定缩放比例,最好将计算结果用 x[0]、y[0]、z[0]表示。



接下来,按照求出的缩放的比例绘制点 D,然后构造 D 点的轨迹。





接下来要作出轨迹在 xOy 平面上的投影。先作出 D 点的投影 D', D'坐标为(x[0],y[0],0), 再作出 D'点的轨迹, 即 xOy 平面上的投影。





作出正方体,再将 D'点平移,得到点 D''(x[0],y[0],-1),构造轨迹,即成为 正方体面上的投影。

## 第三周第三题攻略来啦~

## 马骁

第三题是要构造一个莫比乌斯带



讲义中给出了参数方程。我们可以依此构造图形。

$$r(t,v)=a+bv*\cos\frac{t}{2}$$

首先定义 。注意到中间有两个参数。v 的范围是[-1,1],
这个可以通过直线中的比例来确定。如下图。

其中 U 为自由点,W 为线段中点。比值 WU/WV 即可定义出我们想要的 v t 的定义则十分简单,即为圆上两点夹角。注意改为弧度制后范围是[-<sup>π</sup>, <sup>π</sup>]。

其实按照讲义需要将这个数加上 2<sup> $\pi$ </sup>,才能得到我们需要的定义域。当然, 由于周期性,这个影响不大。就当讲义中说的是[-<sup> $\pi$ </sup>, <sup> $\pi$ </sup>]就得了。



定义好参数以后我们就可以定义这个 r 了,做法是先随意给定参数 a,b,加上 准备好的 v,t。点击计算,按照教程 r(t; v)=a + bv cos (t/2)代入参数值即可。

2. 然后就可以定义 X,Y,Z 了。不用定义函数,依旧采取计算,运用教程中公式,计算出 x(t,v); y(t,v); z(t,v)的数值。上图是计算结果,看不到公式,在 文件中双击就会看到。

3. 然后在 X,Y,Z 轴上进行缩放,就象李萨如图一样,即可得到对于特定 t,v 数值的点。分别单击此点和两个自由 U,R 点,得到两条轨迹。一条是曲线 一条是类似直线的。



 4. 再单击两条曲线轨迹和 U, 在"构造轨迹"的地方就会发现多一个选项, "曲线族"。然后就可以得到一个好看的莫比乌斯带的横向了, 而单击直线 轨迹和 R, 运用曲线族, 就得到纵向曲线族啦~不同的 a,b 数值就会有不同 的图形啦。



李萨如图的教程

徐铭泽

第一个问题 李萨如图是什么?

说李萨如图,就要先说简谐振动。你可能不知道简谐振动是



什么,其实就是像上面那样,点在一个范围内来回摇摆。而且三角函数 sin 或 cos 的图像就是简谐振动的轨迹。

0k 现在说平面李萨如图,就是 互相垂直的两个方向上 简谐振动的合运动。也就是说这个点在水平方向上摇摆,同时又在竖直方向上摇摆。这样它走过的轨迹就形成了李萨如图。就像下图那样,看起来还是很好看的。



那空间就好理解了 就是在 x 轴, y 轴, z 轴三个方向简谐振动的合成。

不难想象,这个空间图在平面上的投影就是平面李萨如图。

第二个问题 李萨如图怎么画

现在大概知道李萨如图是什么东西了,那怎么画呢?

我在这里先说思路。还是先从平面说起吧。因为平面上李萨如图是 x 轴, y 轴上两个简谐运动的合成,而 sin 或 cos 的函数图像就是简谐振动。所以 我们可以考虑构建两个函数,然后在 x 轴上和 y 轴上分别取点使它的坐标为 函数值。这可能不太好理解,举个例子 我构建函数 y=sin(x)和 y=cos(2x), 在 x 变化的时候,两个 y 值会同时变化,然后我在 x 轴上做一个点让它横坐 标是 y=sin(x)的 y 值, y 轴上做一个点让它纵坐标是 y=cos(2x)的 y 值。这 样 x 一变, x 轴, y 轴上的点会一起移动,接下来要把这两个运动合在一起。 怎么合呢?只需过那两个点分别作所在轴的垂线交于一点,那个交点就是我 们需要的点,做出它的轨迹就行了。

说完思路 来说一下具体画法。首先,构造两个新函数,我在这里用 y=sin(3x)和 y=cos(x)(当然你可以改变系数,可能会画出不一样的图形)。 然后 注意 接下来 构建一个圆,在圆上任意取一点并度量角度 像这样



这里 Y 是我任取的点。再次注意 图中的角度单位是弧度,这是很重要的一 点。在度量之前要到 编辑-参数设置 中把角的单位改为弧度(具体原因暂 不做解释,可以自己想)。然后,数据-计算,把度量出的这个数带到方程 里。注意,这里计算的时候直接点你已经度量出来的角度就行了,就是粉色 的那块。然后 可以计算得到两个数值。这时在 x 轴, y 轴上分别取点(右 键轴,在轴上绘制点,坐标点击做出来的一个数),再分别与所在轴做垂直, 交于一点。最后,先点击做出来的交点,再点击最开始在圆上任意取的点, 构造-轨迹,就把一个平面李萨如图做出来了。(如下图)



好现在来说立体不过你必须要理解上面所讲的平面的做法,如果能理解上面的做法,构造立体李萨如图将毫无难度。

首先你要有一个空间直角坐标系(自行下载,教程上有链接)。拿到这个 空间坐标系呢,会看到有 x, y, z 三条轴,我们只要合成在这三条轴上的三 个简谐振动,就能得到立体的李萨如图了。所以,这次要构建三个函数。接 下来还是画圆,取点,量角,把数值代入计算。像下面那样。



然后,在x,y,z轴上分别取点。(注意 这里有一个技巧。给你的坐标 系每个轴显示的长度都代表1。所以,可以标记原点为中心,分别以计算出 的三个数值为比例缩放x,y,z点)。取完三个点后,注意,在空间直角坐 标 系 中 , 要 做 平 行 线 而 不 能 做 垂 线



图中蓝点即为我们要找的交点(这其实有一个简单的方法就是标记向量 先做出蓝点下面那个红点。然后点原点和 z 轴上那个点, 变换-标记向量, 然后选定那个红点, 变换-平移, 就能得到想要的点), 选定这个交点和圆 上的最开始任取的那个点, 做出轨迹, 即得到空间李萨如图。