

点石成金的金手指

-----利用 GSP 培养学生创造能力的体会点滴



求师得教育实验室 邱发文¹

“鱼”与“渔”的辩证关系在教学过程中表现为传授知识与发展能力相结合，并以发展为主的教学原则。教师在教学过程中一方面传授知识（授之以“鱼”），另一方面更要注重学生的能力培养（授之以“渔”），特别是创造力的培养，并把二者统一于教学过程中。鉴于当前应试教育的普遍存在，对于一般学科（语数物外等）由于受考纲无形的限制师生一般都不敢（愿）越雷池半步，这不能不说是限制了学生的思维特别是创造力的发展。而与一般学科相比较，中学里开设的选修课（有的称活动课）就没那么多的限制，相对的灵活性倒使它成为教师培养和开发学生创造力的一块沃土。

通过近一段时期对 GSP（《几何画板》，Geometer's sketchpad 以后简称 GSP）的使用，我们针对创造教育进行了一些颇为令人兴奋的尝试，感想颇多。不妨与大家探讨。

以往的软件一般偏重其外观（界面）的设计，而用其所要表现的教学内涵（教学内容的实质）也只是设计者单凭自己的理解通过几近华丽的表象来表达。一方面设计者理解的不一定全面，极可能误导；另一方面几近华丽的外观会分散学生的注意力，以至本末倒置。片面追求外观效果而忽视教学的内涵不能不说是当前计算机教学软件设计（CAI）的一个误区。然而用 GSP，有人称其为“二十一世纪的动态几何”，却可以避免这两方面的缺陷，并有其自身的优点。

如果说一般的软件是为程序员/计算机教师设计的，那 GSP 则正符合中学生的特点。它本身不需要任何程序语言，它以数学为其根本，以其“动态几何”的特殊形式来表现设计者的思想。而其使用者无须把大量的时间和精力花在繁多的程序代码上，它所需要的也仅仅是一定的数学知识，特别是几何构建思想，关键是你的“想法”（而这也是教学内容最核心的部分）。

我们针对 GSP 在我国中学教学中刚刚起步的特点，为充分发挥学生的主观能动性，本着培养开发学生创造力的目的，主要以开设选修课的形式，采用“解决问题式”教学法，在学生中开设 GSP 活动小组。即在教师教会学生简单的功能应用的前提下，由教师提出问题（包括一些数学和物理方面的问题），由学生自己去探索解决问题的方法，中间由教师按自己的理解对部分

¹ 110001 辽宁沈阳东北育才学校超常部 求师得教育实验室

Email:qiusir@qiusir.com Q Q:3009827 Gmail:qiusir@Gmail.com MSN:qiusir@msn.com

同学（还没掌握基本操作的或还没发现问题的实质的学生）进行提示，最后由教师总结学生的各种方法并进行分析。同时课后由学生根据自己日常学习的知识（主要是数学和物理）提出一些问题，并给出解决问题的方案。例如学生提出一些如圆锥曲线的多种画法，蝴蝶定理，托勒密定理的证明，简谐振动等等具体问题，并给出 GSP 上的解决方法。这不能不说是一种非常有意义而又令人兴奋的尝试，这本身便是一种创造。

圆锥曲线可以说是中学数学教学中的经典内容，此部分具内容多，联系性强的特点，学生一般不容易搞清楚，不过这也是考察学生能力，开发学生创造力的极佳内容。著名数学教育家波利亚曾说：“在数学里，能力指的是什么？这就是解决问题的才智-----我们所说的问题，不仅仅是寻常的，它们还要求人们具有某种程度的独立见解，判断力，能动性和创造精神。”以下是我们师生在选修课上对利用 GSP 画椭圆进行的一些探索。

利用 GSP 来画椭圆，一般可以利用代数法（利用方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，参数方程 $\rho = ep / (1 - e \cos \theta)$ 等）或利用课本上的“同心圆法”来构造椭圆。这里就不细述了。有的同学掌握了简单的方法后又根据椭圆的定义（到两定点距离和为常数的点的轨迹）用几何法来构造椭圆。

- ✓ 构造圆，圆心 F；构造一自由点 F'。
- ✓ 构造圆上一自由点 A；构造直线 AF，线段 AF'。
- ✓ 构造线段 AF' 的垂直平分线 L，并与直线 AF 交 O 点
- ✓ 由 A 点和 O 点构造轨迹。
- ✓ 构造动画使点 A 沿圆运动。

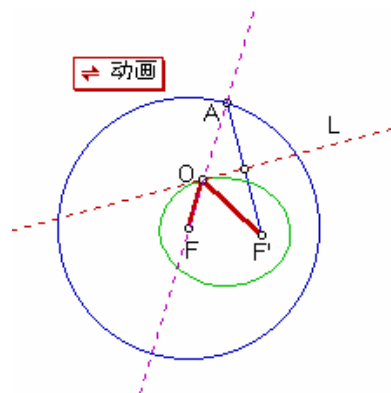


图 1: 定义法间接构造椭圆

分析：由线段垂直平分线的性质（到两 endpoints 距离相等）和对定圆其半径为定值可知 $OF + OF' = R = \text{const}$ 。所以 O 为椭圆上的一点。

深入：通过点 A 的动态运动，观察椭圆与直线 L 的位置关系，可以推测线 L 是椭圆上过 O 点的切线。

验证：由椭圆的光学特性（焦点发出的光线经椭圆面镜反射会聚另一焦点）。可以过 O 点做线 L 的垂线 N（即法线），双击线 N；做 F 点的像点 F''；连接 OF''。

结论：可以发现线 OF'' 经过点 F'。一方面说明线 L 为椭圆 O 点的切线；另一方面说明椭圆的特殊光学特性，这两者是相互证明的。

同时我们可以得出这样一个结论：以定长（椭圆上的点到两焦点距离和）为半径，以焦点 F 为圆心做圆，另一焦点 F' 与圆上任意一点连线的垂直平分线即为椭圆的一条切线（然而这样的结论在书本上是找不到的，而这一切又是学生们自己亲自参与得出的）。

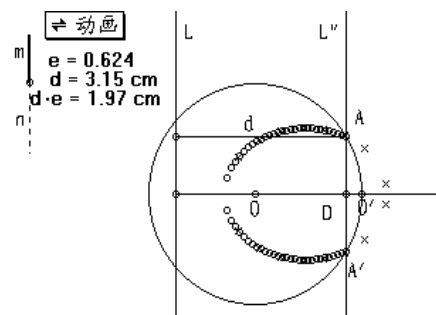
再探索：当把 F' 点拖到圆外时，此时构造的轨迹是双曲线。通过分析可知，此时恰又满足双曲线的定义（到两定点距离差为常数的点的轨迹）；

同样线 L 仍可证明为双曲线的点 O 的切线；同样可以证明双曲线的椭圆的特殊光学特性（一焦点发出的光经双曲线面镜反射，反射光线延长线会聚另一焦点）。简单地将点 F' 移动到圆外情况就大不相同。然而双曲线的结论又和椭圆有惊人的相似。在兴奋的欣赏这“和谐美”之余，除了对 GSP “动态几何”的特殊形式表示惊叹外，不能不对自己的想法表示惊讶。“人人是创造之人，时时是创造之时，处处是创造之地。”

对于细节这里恕不赘述。不妨一试！ 图 2：利用圆锥曲线统一定义构造椭圆

另外有些同学还根据圆锥曲线的统一定义（到定点与定直线距离之比为常数 e 的点的轨迹）来构造椭圆。也不失为是一种好方法。

- ✓ 制作一调数棒。（ e 为两线段的比例数，通过调节动点用来控制 e 的大小）
- ✓ 做定点 O ，定直线 L ；过点 O 做线 L 的垂线 L' ；构造 L' 上的动点 D ；过点 D 做线 L 的平行线 L''
- ✓ 测算两平行线间的距离 d ；标识距离 $d \cdot e$ ；按标识距离 $d \cdot e$ 平移定点 O 到 O' ；以定点 O 为圆心 OO' 为半径作圆 c_1 。
- ✓ 使线 L'' 交圆 c_1 为 A 和 A' 两点；轨迹跟踪点 A 和 A' 。
- ✓ 作动画使点沿线 L' 运动，此时轨迹跟踪给出椭圆图形。亦可选定点 A 和点 D 来构造轨迹；选定点 A' 和点 D 来构造轨迹。



分析：

此法利用两平行线间一条直线上任意点到另一直线距离相等；圆上任意点到圆心距离相等的几何关系来构造椭圆的。尽管构造出的椭圆的平滑度不尽人意，但仍不时为利用几何构造椭圆的一妙法。

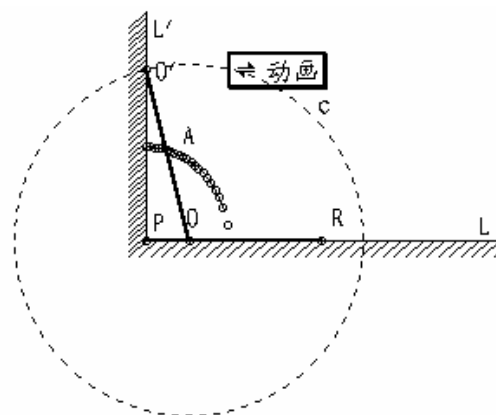
又及：通过调节“调数棒”来改变 e 值，同样可以得到双曲线，抛物线。对于 e 的数值与圆锥曲线的关系一目了然。

通过一段时间的使用，我们觉得 GSP 不仅可以很好的帮助学生理解他们所学的数学物理知识，而且可以灵活的变通，帮助学生理解各部分知识之间的联系。同时对于以抽象见称的数学亦可以以“实验”的形式进行，从上面的两个例子不难看出。这不仅符合学生的认知过程，而且有利于培养学生独创精神。同样可以利用一些实际问题的数学本质，把一些具体物理过程转化成“理想实验”在 GSP 下进行。

我们用 GSP 处理这样一个模型，即一定长杆（长度一定的直杆）沿光滑墙面下滑的几何模拟过程。（在这样一个问题的处理上，许多学生给出自己的方案，仅仅为说明有关椭圆问题，恕不全部列出，下面仅给出其中一种方案）

- √ 构造相互垂直的直线 L 和 L' ，且交点 P （用来表征墙，为直观可适当形象化，略）。
- √ 构造线 L 上的点 R ，连接 PR ；再构造线 L 上的点 O ，以 O 为圆心， PR 为半径构造圆 C ，且圆交线 L' 于点 O' ，连接 OO' 。
- √ 选定线 PR ，点 O 构造动画使点 O 水平运动。

Ø 图 3: 利用模型间接构造椭圆



通过上述操作，双击“动画”按钮即可模拟定长杆的沿墙滑动。然而问题远不仅仅如此。学生还可以在这个软件上研究杆上任意一定点在杆的沿墙滑动过程中的轨迹的问题。

- ◆ 构造杆（线 OP ）上一点 A ，选定点 A ，轨迹跟踪点；双击动画按钮。
- ◆ 选定点 A 和点 O ，构造轨迹。
- ◆ 用鼠标拖动点 A 并观察轨迹的形状变化。等。

在教学过程中，我们本着明确问题，收集资料，处理资料，发现问题，并在发现问题，解决问题的过程中开发并体现学生的创造力的原则，让学生自己去探索，近于半独立式的学习，发展探索能力，培养创造精神，在上课时间不多的情况下，已经使参加这项活动的学生深深的喜欢上了这门课。

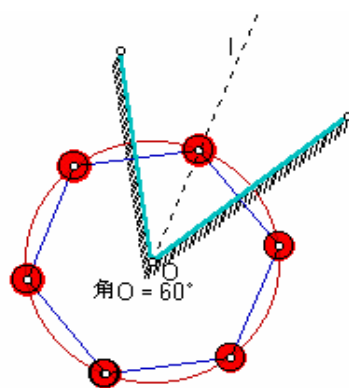
利用 GSP 以创造教育的观点对于处理象圆锥曲线这样的经典内容不能不说是能使老树发新枝。给传统的数学教学引入一种新的思路，新的观念，以至新的模式。

我们在选修课上处理数学问题的同时，也相应用 GSP 解决一些物理问题。把一些实际生活中很难实现的物理过程转化成“理想实验”在 GSP 下进行。例如笔者用 GSP 讨论过平面镜组成像的问题。

- I 用互成角度的两线段代表平面镜组，在角平分线上取一点代表物体。
- I 按物理平面镜成像的性质依次取两线段为镜面，并使物点相应变换反射，一直到像成到盲区内（两平面镜反向区）。
- I 动态改变平面镜夹角观察物像间的位置关系

分析：可以利用上面的小软件讨着重论以下两个方面的问题：1. 成像个数（不能简单用 $n=360/\theta - 1$ ）。2. 物像位置关系（始终共圆， n 为整数时物象为正 n 边形顶点）。

学生在教师的一定讲解的基础上自己动手去研究平面镜组成像的问题，同时利用物象的几何关系（ n 为整数时物象为正 n 边形顶点），得出一种不完善的正 N 边型的做法。



Ø 图 4: 平面镜组成像研究

注: 这里还可以对物点不在平面镜组夹角平分线上时的情况; 对于平面镜组成像问题用 GSP 非常容易解决, 而且动态直观, 有兴趣的不妨一试。这里就不赘述了。

“科学源于好奇, 技术源于创造。”通过开展以 GSP 选修课的形式渗透创造教育的活动, 使学生进一步提高了对数学物理等一般性学科的兴趣, 学习的热情和强烈的好奇心, 坚定了他们的学习信心, 加强了学生的理解力, 特别是数理之间的联系(一切自然现象中都蕴藏着数学原理)。更好地培养了学生的创造能力。

后记: 如果说一般的好的教学软件是一块金子的话(鱼), 那 GSP 则是一只可以点石成金的金手指(渔)! 我们在教学过程中经常强调“授之以渔”, 而对于我国中学教学中引入 GSP 可以说是为中学数理教学注入了新的活力, 在使用时的兴奋之余, 不能不对为此作出贡献的有关部门表示感谢(人民教育出版社, 北京天科翼公司), 对给予我们热情支持的北师大桑新民教授和全国中小学计算机中心王珏同志表示感谢, 同时更希望能在我国中学教学特别是创造教育和数学物理教学中加引入并加以推广, 希望有更多的人投入其中。大家能互相交流, 共同为我国 CAI 做点务实的事。



qiusir lab qiusir.com 1998/4/1