

国家“九五”重点课题“计算机与各学科课程整合”子课题

第二部分

动态开放环境下的数理综合探究课

——借助 GSP^①等现代教育技术,基于电脑、网络与数学物理综合课程的整合,面向中学生的动态开放性与协作探究性学习及创新素质培养的实践研究



求师得教育实验室 邱发文¹

引言

- 21世纪几何学万岁!在美国费城出席美'98科学年会的教育学家认为,在二十世纪末的高科技发展的过程中,几何原理得到空前的运用,21世纪应当把几何学放到头等重要的地位。学校传授给下一代的不仅是知识,而更重要的是技能,几何学有较强的直观性,有助于提高学生认识事物的能力,应当成为自然科学教育大纲中的首选和重点内容。几何学引进电脑后效果更佳!
- 既然数学对理解自然科学,信息科学及工程学具有中心的重要地位,因而我们再次强调需要把数学与这些学科以综合的方式去教。在物理学,其他自然科学及工程中,大多数具体概念都可以用两种相互补充的方法——实验的和数学的——来处理。综合的方法表明,一个现象的数学描述具有阐明和加强的效

^① GSP the Geometer's Sketchpad, 中文译名《几何画板》,以后简称 GSP

¹ 110001 辽宁沈阳东北育才学校超常部 求师得教育实验室

Email:qiusir@qiusir.com Q Q:3009827 Gmail:qiusir@Gmail.com MSN:qiusir@msn.com

果。

-----选自《美国 2061 计划》

- 学习任何知识的最好方法是你亲历的探究。(The best way to learn anything is to discover it by yourself.)
——乔治·波利亚

一、课程开设的背景

1、少年的壮举 发现的诱惑

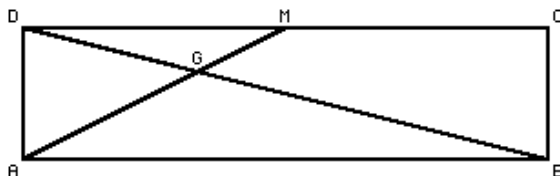
1995 年夏季学期，美国格林法姆学校的两名相当于中国初中二年级的学生 David Goldenheim 和 Dan Litchfield 在完成老师布置的“把一条给定的线段分成任意等份”的几何任务时，发现了“任意等分线段”的新方法，在这以前人们通常采用欧几里德在 2500 年前所用的方法，他们的构造（已经被命名为 **GLaD** 构造）是“自古以来第二种构造等分的方法”。不仅如此，他们还发现了构造 **Fibonacci** 序列的独创方法。为此，还和他们的辅导老师 Dietrich 应邀参加 NCTM 的 74、75 次年会，并应邀在“技术与数学”第 12 次年会上发言，这也是该会议中的一次邀请学生进行演讲。而这一切并没有使用传统工具直尺和圆规，完全是在 **GSP** 的帮助下完成的。

“50%的数学知识是 1940 年以后出现的，而在这其中 99.9%是由博士级的人物发现的。Dan 和 David 的发现是非常值得注意的，因为这些发现可以运用中学数学知识通过第三种方法证明：代数、几何、推理。”

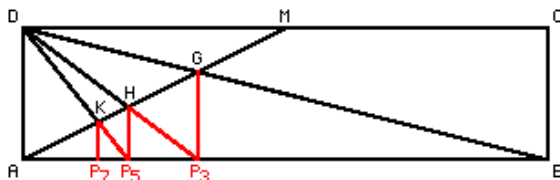
当最开始通过电台得到这样的一个消息，在惊讶之余，更多的是一种兴奋，准确地说是一种诱惑，一种前所未有的探索发现的诱惑。

附：GLaD 构造的发现

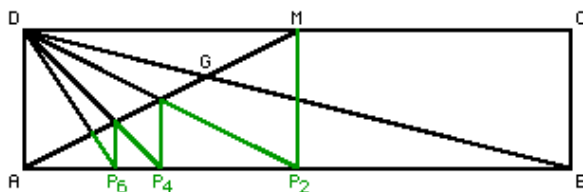
构造矩形 ABCD，作对角线 BD，构造 CD 边中点 M，连接 A，M，构造“半对角线”AM 与 BD 相交于点 G。



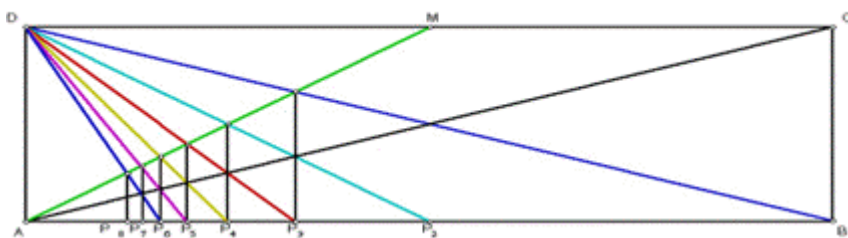
通过点 G 作 CB 边的平行线交边 AB 于点 P_3 ，即为线段 AB 的三等分点。如此可以构造 P_5, P_7 ，第五第七等分点。 $AP_3 = (1/3)AB$ ， $AP_5 = (1/5)AB$ ，及 $AP_7 = (1/7)AB$ 。



可以证明这种方法还可以构造偶数等分点。上面的构造中的点 G 被点 M 取代，以此类推，可以得到点 P_2, P_4, P_6 。即为线段的中点、4 等分点和六等分点。



通过扩展，我们可以看到这种方法可以使任意线段任意等分。这就是前面提到的 GlAD 构造。



摘自 <http://world.std.com/~wij/glad/>

2、GSP 点石成金的金手指

如果说一般优秀软件是一块金子，它能带给我们很多属于别人的好东西，那么 GSP 则是一只点石成金的金手指，在分享别人成果的同时，更能够探究出属于自己的东西，并让别人分享。

GSP——二十一世纪的“动态几何、发现几何” (the Geometer's Sketchpad, 简称 GSP, 中文译名几何画板) 是一种优秀的教学软件，原版提供者是美国 Key Curriculum 出版社，由人教社汉化并独家发行。它是一种通用的数理教学环境，



提供了充分而简便的手段帮助用户实现其数学特别是几何设想的构造，使用者几近随心所欲地构造。以往的教育软件往往偏重界面的设计，所要表现的教学内涵也大多是设计者单凭自己的理解通过静态图象来表达。一方面设计者的理解不一定全面，极可能误导；

另一方面华丽的外观会分散学生的注意力，以至本末倒置。片面追求外观效果而忽视教学的内涵不能不说是 CAI 的一个误区。然而用 GSP，却可以避免这两方面的缺陷，并有其自身的优点。

GSP 通过两个相关的角度来模拟几何图形。在画板 (绘图, SKETCH) 中，可以利用电子版的欧几里德工具---笔、直尺和圆规---作图，它提供了较为复杂的图形构造和旋转、平移、缩放、反射等二维变换及对长度和角度的准确测量和计算。工作时，还可以对图形着色，标记和注释。画板就像一个动态的黑板，拖动是它的核心内容；脚本 (记录, SCRIPT) 是对构图过程的描述，既可以非常方便地录制作图的步骤，也可以在画板中播放脚本生成一个新的图形，还可以注释，打印和存储。脚本相当于一个录放机。



GSP 以数学为其根本，以“动态几何”的特殊形式来表现设计者的思想，它对几何关系描述的相当准确，而在图形的变化中还能保持几何目标之间的

恒定关系，比如平行、垂直等，可以从变化中找到不变的几何规律。这也是GSP的精髓所在。在这里关键是你的“想法”（而这也是教学内容最核心的部分）。它使软件由教学辅助工具根本转变为一种认知工具。可以毫不夸张地说，GSP是当前最出色的教学软件，或许可以称为伟大的教学软件。

3、课题“GSP与数理综合课的整合及创造力的培养”的开展

课题“GSP与数理综合课的整合及创造力的培养”隶属教育部全国中小学计算机教育研究中心（北京部）承担的国家九五重点科研课题“信息技术在中小学校的应用与中小学信息技术教育研究”，目前已经有数百所学校和当地教研室参加。我校（东北育才学校）自九七年开始经原北师大未来教育中心主任桑新民教授的推荐引进GSP，并以选修课的实践形式在部分学生中进行计算机和网络与数理综合探究课整合的尝试研究，当时这在中国尚数首次。在“以人为本，实践创新”的宗旨下，本着“为迁移而教，为创造而学”的原则，通过一些具体的数理问题创造性探究和网络化学习（E-Learning）的尝试并对学生的创新素质进行培养。几年的努力实践，初步形成了一套有关动态、开放、交互环境下自主、合作、探究学习的创新教育实践模式。为其他实验学校提供了借鉴，也得到了“中心”总课题组的表彰。（查阅更多内容请访问课题组主页：<http://qiusir.home.chinaren.net>）



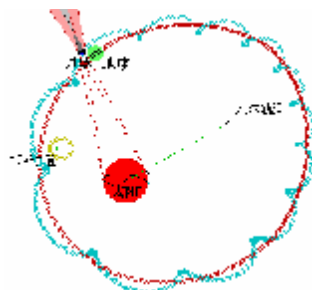
二、课程的目标

1、培养学习兴趣 激发探究热情

“热情与好奇”是人类赖以生存的两大因素。天才的秘密在于强烈的好奇和兴趣，从而产生无限的热情，这也是勤奋的重要动力。爱因斯坦说过，“我没有什么特别的天赋，我只有强烈的好奇心”。培养学生对信息的敏感性和好奇心要远比死记硬背一些枯燥的“知识”更重要。借助电脑通过范例的动态演示辅助学生加深对概念的理解，从而启发创新思维。而探究内容与兴趣相结合，既有方向性又有动力。这是数理综合课最基础的途径。以学生成长为本，培养他们学习的兴趣、激发探索知识的热情，这是数理综合课最根本的目标。

2、培养综合运用所学知识的研究能力和创新意识

通过对具体问题的探究，让学生在探索中学，在尝试中成功，鼓励学生提出问题，倡导“提出问题比解决问题更重要”。使学生能够综合运用所学的知识去分析问题和解决问题，从学知识（knowing）到做知识（doing），即布鲁纳所倡导的从“占有真理”到“追求真理”。重视数理知识的探究和为学生掌握



求师得荣誉出品

信息技术铺平道路，同样注重学生的综合素质的培养。鼓励学生尽可能找到更多的方法，重视方法的独特性，强调思维的新颖性，培养创造意识。

3、培养搜集处理信息的能力和加强自我监控

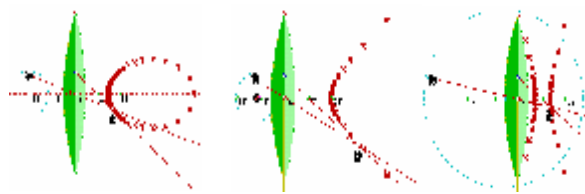
《中共中央国务院关于深化教育改革全面推进素质教育的决定》中有关智育部分的内容中明确提出“重视培养学生收集处理信息的能力”的要求。英特网作为第四种媒体将在信息化社会中发挥举足轻重的作用。通过网络收集处理信息的能力就显得越来越重要了。计算机上提供了丰富的学生思维活动的素材和工具，网络实现了“资源共享”，这可以提供一种相对开放的大课堂。计算机在这里不仅仅是一个“展台”，也是思维实践的场所。计算机操作的意义远大于一种工具的使用技能而是一种社会实践的基本能力。技术的发展正改变实践的具体内涵。

电脑加网络的学习环境使学生活动具可选择性。通过查阅资料、学习、讨论、推理发现开展的“小科研”活动，有助于培养学生自我监控能力。而学习材料的丰富性和交互性有助于实现自我指导。

4、培养概括迁移能力

心理学的研究表明，材料的概括性越高，知识的系统性越强，迁移性就越灵活，注意力越集中，创造性越突出。利用计算机在信息处理上的优势，对于日常教学中教师和学生的优秀范例都给予备份，也通过英特网等途径搜集一些素材和范例---这也是创造性思维的材料，这种材料越丰富，越新颖，引发学生的思维越具有创造性。

在注重知识积累的同时，引导学生对知识概括和总结，即注重知识的系统性。即一方面注重数理单科知识的系统性，另一方面，注重数理综合的系统性。从而培养学生的迁移能力。



5、培养现代意识 加速学生社会化的进程

未来社会是学习化的开放社会，人们面临越来越多的选择和自主决策，学生通过在开放的教学环境中选择自己的学习内容和方式，获得不同的发展，通过开展研究性活动，同样培养学生的语言文字表达能力以及综合表达和自我评价能力。通过小组的协作，融合和学生个性张扬与团队协作精神的培养。从而学会如何面对自由以适应未来社会生活的需要。教育是个系统工程，“教育之宗旨何在？在使人成为完全之人物而已。”^①促进学生的全面发展和提高学生综合素质是教育的核心。一个木桶的盛水量不是由最长的决定，而取决于最差和最短的那块桶板。学校和社会不是分开的而是一种过渡，学校教育并且具有前瞻性。学习不仅仅是知识的丰富，更是培养学生的现代意识并帮助他们实现社会化进程。

三、课程的指导思想

信息时代，知识日新月异，传统教学中普遍强调记忆以传授知识为主的“重现型”教育已经不适应时代的要求，当前的教育正向发展智力、培养能力的“发现型”教育转变，同时比以往更加注重对人才素质的培养。创新是世界各国教育共同面临的一个永久课题，在“教育的永久改革”中，探索创

^① 王国维 《论教育宗旨》

新教育具有更深远的意义。创新教育在基础教育阶段的主要目标是培养学生的创新素质。

随着信息技术突飞猛进的发展，复杂的计算机设计、模拟系统及交互技术为创造力的培养和开发提供新的途径。创新教育呼唤教育创新。在课程的开设过程中主要坚持师生互为主体的原则、问题开放性原则和培养综合分析的能力和创造素质的方向性原则。

1、强调探究过程 注重知识整合

学习任何知识的最好方法是亲历的探究。计算机不仅是**教具**，更是**学具**最有潜力的认知工具。借鉴荷兰教育家汉斯·费赖登塔尔为代表所倡导的“**reinvent**”（再创造）教学原则。鼓励学生质疑，让学生更多的参与问题的提出，注重知识的传授理解，更强调学生的探究的过程。不仅将探究作为一种学习方式，而且将探究作为课程的内容标准。在教师的指导下，在电脑软件提供的探索环境中学生**动脑加动手**，积极主动地参与知识的发现，亲身体验创造经历，使所学的知识内化为一种稳定品质，从而培养学生的创新素质。

2、突出动态过程 培养创新思维

在数理教学过程中，抽象的数学表达和模糊的物理过程在一定程度上限制了学生的思维，而学习过程中不能及时得到反馈势必会影响学生求知的热情。借助电脑的高速运算，通过参数的连续变化，使原来抽象的数学表达和模糊的物理理解变成形象直观的动态图景，这往往可以启发学生问题、想象和猜想，从而激发创造性思维。爱因斯坦认为：“提出一个问题往往比解决一个问题更重要……提出新的问题……需要有创造性的想象力，而且标志着科学的真正进步。”鼓励学生提出问题和大胆的猜想。在电脑提供的动态、开放、交互的环境中，学生的思考得到及时反馈，通过学生的动手实践总会有新的发现，从而使好奇心和求知欲得到满足和加强。

3、注重原型启发 实现概括迁移

知识在于积累，有积累才有创新，创新不是“无中生有”，而是“推陈出新”。丰富的数理知识积累是创新素质培养的基础。心理学的研究表明创新同样需要原型的启发。

概括是对一个科学技术领域把对全体细节的认识提升到更高的层次，用尽可能少的知识更深刻地表达尽可能多的知识。它使知识在积累中不断被选择、提炼或淘汰，使已知知识不断以更普遍的形式而更新。概括精神是科学技术进步的重要理性动力。按照现代教育心理学的理论，“在理论的高度上把握了解了实际情况后就能利用概括了的经验去迅速解决需要按照实际情况做出分析和调整的新问题。”电脑软件提供的环境中介使数学的表达更为直接。学生容易总结出概括化的原理，从而培养和提高学生概括化和总结的能力，同时充分利用原理原则的迁移，让学生在动态直观开放的环境中去观察和实践原理，从而实现创新能力的迁移。

4、发挥电脑、网络优势 开展研究性学习

电脑的应用已经对传统的教学产生冲击，而英特网的发展正引发教育的革命，它正成为我们学习的**第二空间**。丰富的思维活动素材和各种免费的工具软件构成了一个**开放**的大课堂，体现着“资源共享”的新理念。技术的发展正改变实践的具体内涵。计算机在这里不仅仅是一个“展台”，更是思维实

践的场所。计算机网络操作技能的意义超越了一种工具技能而是一种社会实践的基本能力。

“谁也不能教会谁任何东西。^⑤”最好的学习环境是学习者积极主动并可以自我指导。技术有使这种学习环境变为现实的潜力。电脑加网络的学习环境使学生活动具可选择性。通过资料查询、合作学习、探究发现、网络发布等开展的“小科研”活动，有助于培养学生自我监控和独立学习的能力。而学习材料的丰富性和交互性有助于自我指导从而实现知识内容和结构的动态丰富。同时我们也体验到“群件”---一种开放、合作课件开发的必要性。

创造性思维必然和某些具体问题解决相联系，即创造性思维必然是为了达到某种目的而进行的。整合实践过程中，通过任务驱动对开放性综合题目研究，把教材的内容当作培养学生的起点和基础，同学带着一定的问题和目标去探索，在知识的运用中激发和培养创造力。开放性综合题目适应学生个别差异，容易引起学生的想象，激发起学习动机。

研究性学习使理论更贴近实际，并从实践过程中获得知识。它不拘泥于现成结论的死记硬背，而是着眼于各种不同结论的选择，突出现成知识的动态性和能力结构的稳定性。使“动态”的内涵扩展到“通过网络实现知识的交流、合作和开放的动态结构”的新层面上是我研究的重要方向。现代信息技术的发展加快了知识的传播和更新，网上合作学习成为可能，基于现代技术的研究性学习将成为信息社会创新教育的一个重要特征。

5、珍视创造成果 师生互为主体

教学改革关键是教学观念的更新。教育即是自由，“呼唤人的主体精神是当代时代精神的最核心的内容。^⑥”创造力的发展必须在自主和安全的气氛下才能进行。打破教师万能、唯我独尊的观念，容纳不同意见，尊重并强调学生的个性。套用 Ibsen 的一句诗：what is a student's first duty? The answer is brief: to be himself! 教学过程中学生以研究者的身份参与包括发现探索在内的获得知识的全过程，教师不是知识的灌输者，而是学生的激发者、培养者和欣赏者。

现代信息技术的发展使教师在知识传授过程中的角色发生改变。师生关系的比喻有“一桶水和一杯水”，也有“一条小溪与一杯水”，但都只强调教师对于学生的单向给予，而忽视了学生的能动性。我更欣赏“灯芯和煤油”的比喻，从某种程度上教师更依赖于学生。正如我的学生所设想的师生关系体是由教师的经验与学生的好奇和热情组成股份公司。现代解释学认为，人们的思维和行为的模式正由“主客模式”向“互主体模式”转变，教学相长，学生也是老师，“向学生学习”是一种时代的新理念。

现代教育技术为创新教育注入了新的活力。但同时我们也看到计算机和网络也只不过是一种工具，它们不能使垃圾变成黄金，更多的关键具体工作还要靠人自身的创造性的劳动来实现。借助电脑通过参数的连续变化实现知识理解的动态图景，借助网络化学习（E-Learning）实现知识丰富动态结构，在计算机和网络提供的开放的环境中，学生自主、合作、“实践”的学习方式，有利于创新素质的培养。“动态开放”环境进一步完善和学生主体性的更好发挥是今后工作的研究方向。

^⑤ 卡尔·罗杰斯语

^⑥ 《面向 21 世纪的新基础教育》叶澜 99/6/19 《中国教育报》

实践在当前更具有现实意义，实践才能创新。只以“试题”来评价教育效果，最多只能使学生学会“纸上谈兵”。人是教育的根本，创新是教育的目标，实践是创新的基础。

四、课程的构建

(一) 实施条件

1. 课程对电脑、网络等硬件环境的要求是中文获带中文的 windows3.x 以上版本的操作系统，内存 4M 以上，386 以上机型，3.5 英寸软盘驱动器和硬盘驱动器。安装了 GSP 等基本软件；连接了局域网，最好接通 internet。

2. 参与课程的同学要求有必要的数学物理知识储备和电脑基本应用操作等要求。协作的组织形式划分成多个小组，3-5 人一组不限（同一个小组的同学可以是不同班级的、不同年级的学生），学校、班级和教师对于小组内部和各个小组之间的学习交流和协作探究学习能够提供充分便利的条件，比如共同学习的时间、图书馆、电脑网络等资源的应用。

(二) 课程面向的对象

在校中学生（文理分科的要求是理科。通过学生调查问卷、申报表挑选，男女生不限）

(三) 课程安排

课时及时间安排：每周 2 课时，最好安排在周五、周六下午在多媒体教室/机房进行，对于期中的小组集中交流和期末的汇报最好安排在阶梯教室。

(四) 课程内容

- 1、基本操作及数学基本概念
- 2、三角形相关...
- 3、多边形相关...
- 4、圆相关...
- 5、解析几何相关...
- 6、一般函数曲线相关...
- 7、圆锥曲线相关...
- 8、特殊曲线相关...
- 9、三角函数相关...
- 10、复数相关...
- 11、特殊构造相关...
- 12、立体几何相关...
- 13、著名数学问题和定理...
- 14、矢量运算相关...

- 15、运动学相关...
- 16、光学问题相关...
- 17、振动和波相关...
- 18、电学磁学相关...
- 19、机械装置设计相关...
- 20、其它...

具体问题建议后附

五、课程的实施

(一) 教学设计及组织实施过程

1、选择学习的内容

所选内容应该是学科领域中的核心知识，对提高学生的理解能力和创造性思维能力具有重要的价值；内容的难度适合于学生所处的年龄特点和能力水平。数理综合探究课所选内容主要是中学数学和物理的一些核心的知识，更偏重于能借助计算机实现数学原理和物理表象整合的数理交叉知识点。鉴于教育技术的发展，所研究的内容应该有别于现行的大纲，比如李萨如图本来到大学才接触到，但借助现代教育技术则变得直观和容易。对于更多的具体的题目建议后附。

2、确定探究性学习的类型

主要是根据所选的内容的特点不同来选择不同的探究形式。

a) 以探究为本的教学

主要是针对一些特别基础和新的概念。比如在学习物理学中“圆周运动在水平方向的投影是简谐振动”的命题的时候，考虑到此命题的重要，它是处理振动特别是处理有关波的问题的基础，一方面联系课堂教学，通过传统的数学方式证明，另一方面组织学生借助 GSP，通过几何模型的构造探索从而间接证明。

b) 以探究为本的学习

个人的见解是教学过程中最希望得到的。在选修课上创设了“异想天开”和“伪科学”探索栏目，鼓励学生有自己的见解，很多同学提出了有价值的问题。于彬彬同学的关于如何求作过两定点的关于任意曲面的入射点问题获得专家们的好评，并在总课题组中产生很大反响。爬墙者、骑车练习者等范例的构造不能说多么精巧，却是学生非凡想象的展现。不管他们的想法是否已经过时，但其中的教育意义是一样的。尊重学生从尊重他们的想法和作品开始！

c) 科学探究

在教师的探究为本的教学和学生的探究为本的学习的过程中，当学生对于自己的一些想法和发现进行更广泛、更深入和更系统的探究的时候，他们的学习和研究也就转变为一种科学的探究。比如蝴蝶定理的推广、万蝶起飞和三角形五心的研究等学生的探究都可以看作是科学探究或者是准科学探究。

3、确定教学组织形式

a) 教师引导的研究性学习

主要是通过教师的讲解、讨论、练习的方式进行，此种方式主要是发挥学生的主体作用教师的指导作用，更强调学习的过程。通常是针对一些相对比较基础和系统的知识题目。比如对于圆锥曲线的构造的系统的研究。

b) 分层（工）的探究性学习

在完成一个研究题目的过程中，从题目的选取，研究性学习，到成果的传播推广，需要很多具体的工作，而对于每一个同学，都有他擅长的一方面，如何发挥学生的特长，同时培养学生的协作学习及合作精神的培养，这就需要小组内的同学在明确共同的目标的前提下，独自承担其中的某一部分。

c) 小组合作的探究性学习

如果一个题目的完成离不开小组成员的分工合作，那么完成一个系统的研究题目的过程就离不开各个小组的通力合作。在强调小组内部的协作不能忽略小组间的交流。

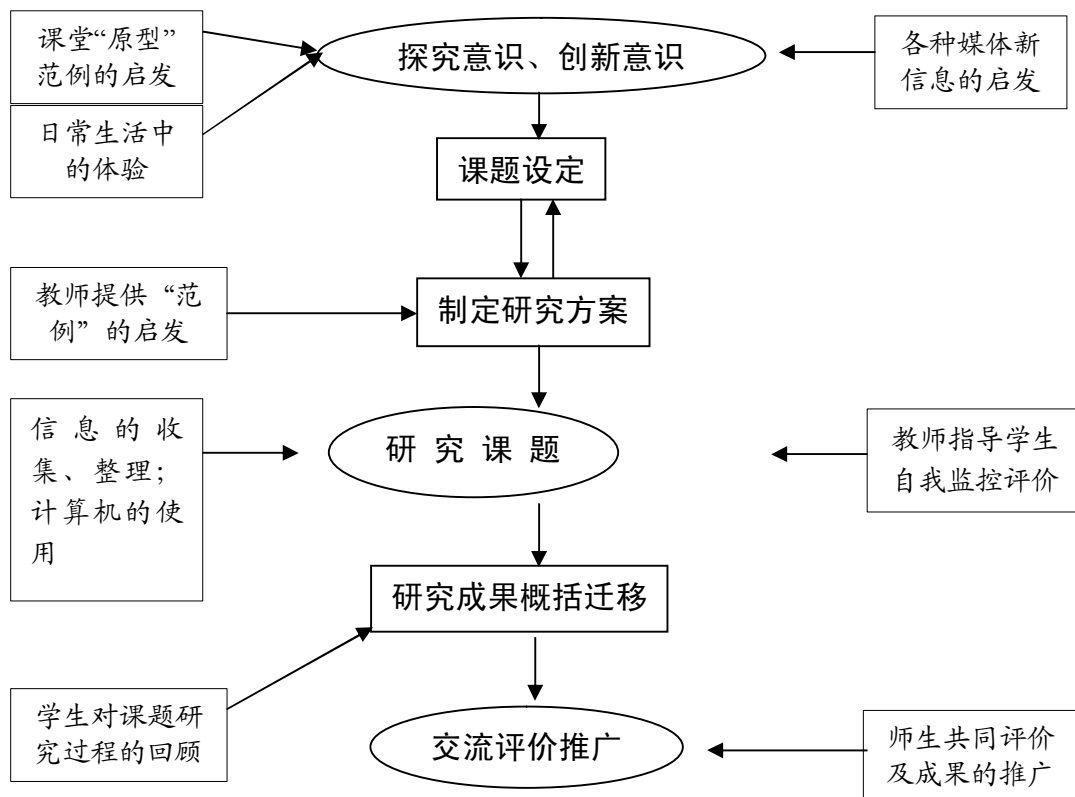
d) 开放式的探究性学习

对于一些比较开放的题目，它的完成过程相对开放，可以通过上述几种方式的结合。

4、材料准备和活动设计

通过日常观察或从互联网等媒体上查找信息；方案设计与论证；实验探究；搜集、分析和解释所获得数据；通过研究汇报和设立专题网站进行交流反馈。

附：课题研究实施的流程



参阅人民教育出版社物理室 孙新 《新高中物理教材中的<课题研究>》

创造性思维一般有一个原型启发，原型在创造性思维中有重要意义。教

学过程中，通过课堂演示或英特网把一些新颖的范例介绍给学生，以启发他们的创造性思维。如变革某一问题的重要属性，如讨论转动叠加时从速度相同、到速度为整数比、到任意比；或将一些属性从给定的情形迁移到新的情形中，如数学上的圆和圆上的一动点迁移到物理学上便是圆周运动，再迁移到“振动和波”上便构造出李萨如图、横波和纵波等。

在数理综合课的教学过程中，非常注重原型启发的作用，经常和学生交流一些新颖的范例，抛砖引玉。实践表明，一些新奇的事例经常会撞出学生创造性思维的火花。通过开发原型范例来启发创造思维一直是贯穿于教学过程的一条基本方法。

(二) 椭圆构造个案

利用 GSP 画椭圆，可以利用方程 $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$ 、 $\rho = \frac{ep}{1 - e \cos q}$ 或利用课本上的“同心辅助圆法”来构造椭圆。

有的同学在掌握了简单的方法后尝试根据椭圆的定义（到两定点距离和为常数的点的轨迹）用几何法来构造椭圆。

GSP 脚本

1. 构造圆，圆心 F；构造一自由点 F'。
2. 构造圆上一点 A；构造直线 AF，线段 AF'。
3. 构造线段 AF' 的垂直平分线 L，与直线 AF 交 O 点
4. 由 A 点和 O 点构造轨迹。构造动画使点 A 圆运动。

模型分析：由线段垂直平分线的性质（到两 endpoints 距离相等）和对定圆其半径为定值可知 $OF + OF' = R = \text{const}$ 。所以 O 为椭圆上的一点。

深入研究：通过点 A 的动态运动，观察椭圆与直线 L 的位置关系，可以推测线 L 是椭圆上过 O 点的切线。

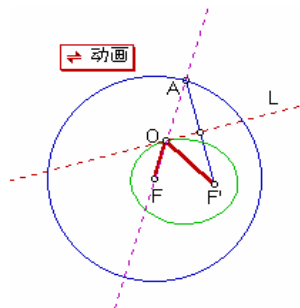
验证想法：由椭圆面镜的光学特性（焦点发出的光线经椭圆面镜反射会聚另一焦点）。可以过 O 点做线 L 的垂线 N（即法线），双击线 N；做 F 点的像点 F''；连接 OF''。

得出结论：可以发现线 OF'' 经过点 F'。一方面说明线 L 为椭圆 O 点的切线；另一方面说明椭圆的特殊光学特性，这两者是相互证明的。

同时我们可以得出这样一个结论：以定长（椭圆上的点到两焦点距离和）为半径，以焦点 F 为圆心做圆，另一焦点 F' 与圆上任意一点连线的垂直平分线即为椭圆的一条切线（然而这样的结论在书本上是找不到的，而这一切又是学生们自己亲自参与得出的）。

再探索：当把 F' 点拖到圆外时，此时构造的轨迹是双曲线。通过分析可知，此时恰又满足双曲线的定义（到两定点距离差为常数的点的轨迹）；同样线 L 仍可证明为双曲线的点 O 的切线；同样可以证明双曲线的特殊光学特性（一焦点发出的光经双曲线面镜反射，反射光线延长线会聚另一焦点）。简单地将点 F' 移动到圆外情况就大不相同。然而双曲线的结论又和椭圆有惊人的相似。在兴奋的欣赏这“和谐美”之余，除了对 GSP “动态几何”的特殊形式表示惊叹外，不能不对自己的想法表示惊讶。“人人是创造之人，时时是创造之时，处处是创造之地。”

再推广：此外，还可以对不是垂直平分线和成任意一定角的情况进行讨



论。

另外有些同学还根据圆锥曲线的统一定义等方法对椭圆进行构造。在和学生王小龙一起探讨李萨如图的构造方法时，无意中对椭圆的构造有了物理的思路。由物理波的叠加知，相同频率的互成任意角度的波的叠加图形是椭圆（0，180度除外）。目前对于椭圆的构造方法已经有十几种。

在教学过程中，我们本着明确问题，收集资料，处理资料，发现问题，并在发现问题，解决问题的过程中开发并体现学生的创造力的原则，让学生自己去探索，近于半独立式的学习，发展探索能力，培养创造精神，在上课时间不多的情况下，已经使参加这项活动的学生深深的喜欢上了这门课。

（三）考核办法与评价标准

通常是期中操作技术的考核交流，期末小组专题的展示交流和论文答辩。在最终考核中参考学生协作学习和参加具体的实践活动情况。比如网站的建立，交流、服务等。

| 课程 | 目标完成情况 | 必备技能 | 评价重点 |
|---------|--|--|---|
| 数理综合探究课 | 1. 收集相关信息的情况（主要是网络搜索、图书资料查询和调查访问情况的反馈）、信息的整理、信息的交流。 2. 课题研究过程中对知识的探索过程。 3. 对所研究题目所表现出的积极性与主动性情况。 4. 引导学生通过亲身实践，加强所学习知识和社会结合的意识。 | 1. 利用 internet 查找并下载有关的资料；去图书馆查阅资料；对专家的访问等 2. 信息分类整理的基本方法。 3. office 系列软件的使用和 GSP 必要的构造方法及必要的网络知识。 | 1. 课题的可行性、新颖性、实效性。 2. 成果的有效性、丰富性和创新性。 3. 小组同学的参与程度、协作意识。 4. 作品完成过程中的对外交流、传播推广程度。 |

知识的本身应该包括它的交流和传播。升阳公司总裁麦克尼利有这样一句话被广泛传播，“网络之美在于它对所有人都是开放的，每个人都可以站在别人的肩膀上。”作为教育工作者，学生可以站在老师的肩膀上，同时老师也可以站在更多学生的肩膀上。特别在网络所提供的第二空间里，师生的概念、范围都在发生变化。提倡学生把自己的心得及时记录总结，建立作品集，最好是通过网络的免费空间，建立专题的网站，扩大交流。（欢迎访问 <http://qiusirstudents.home.chinaren.net>）这也是评价学生的一个方面。



六、效果与评价

(一) 教学的效果

1、调动了研究性学习的积极性，培养了探究学习的信心

蝴蝶定理的推广（附后）和椭圆的特殊构造被“中心”的 WWW.NRCCE.COM 网站评为体现中国学生创造力的作品，并被教育部全国中小学计算机教育研究中心和中国教育学会中学数学教育专业委员会评为学生发现特别奖，《计算机教育通讯》上也就此事组织讨论；椭圆的构造及圆锥曲线的统一构造我们已经找到了十几种方法。蝴蝶定理再推广的论文《蝴蝶齐飞》（附后）具有相当的水平。直觉、想象、验证的认知过程为理科教学提供借鉴；高一学生提出的李萨如图的几何构造使本来到大学才接触到的非常抽象的知识变得直观、容易、有趣。这也验证了布鲁纳的一句话：“任何学科的基础都可以用某种形式交给任何年龄的任何人。”现代化教育技术向我们的“教学大纲”提出了质疑。

不管学生们的发现是否早已经成为已知，从教育者的角度来看它们的意义是一样的。

2、引发思考和激发想象

秉承“提出问题比解决问题更重要”，“想象比知识跟重要”的原则。数理综合探究课特地创设了异想天开的栏目。很多同学提出了非常有价值的问题。

于彬彬问题引起专家们的好评，并在总课题组中产生很大反响，至今还没有得到完全的解答。一个粗糙的回旋加速器的模拟却使学生体提出了很多具体的问题，这丰富了知识的本身。爬墙者的设计不能说多么有新意，但不得不佩服学生大胆的想法。尊重学生从尊重他们的想法和作品开始。

3、体现合作与继承发展

水波分析可能是 gsp 与数理结合的最经典的范例之一。它从几何的角度以动态的方式从根本上解决了对振动和波的认识，其在振动和波的认识方面有很高的价值。而它的诞生是师生合作开发的产物，教师的任务是解决问题的内核，更多的具体工作是学生去做的。交流发电机的研究；游标卡尺的创造性的发展（游尺上还有游尺）都很大程度上体现了学生的合作继承能力。

4、强化了学生的过程学习

很多学生从帮助老师做一些具体工作的过程中得到提高，正如卢梭提到的“经验和接触是真正得导师”过程学习有助于学生对知识的内化整合。

圆锥曲线的构造是其中比较典型的范例，知识的动态理解有助于数理知识的内化整合。班级元旦晚会的“幸运转转”的设计就体现了学生的过程学习。视觉暂留与特殊曲线的研究等都是学生通过具体的动手发现的。

5、培养了科学审美观

对科学美的审美是一种境界，科学家对科学的执著往往是对美的追求。课题组在重视学生发现探索知识的同时也重视学生科学审美观的培养。

李萨如图的研究，美丽的花瓣线，科学美的赏析是一种享受和对成功的体验，我有时考虑是否可以开设一门利用计算机和数学物理知识的美术课。杨振宁就有“物理与美学”的个人网站。

(二) 课程开设成果

从 97 年开始致力于“计算机与数理综合探究课的整合及和创造力培养”

的研究，在国内最先创设数理综合探究课，作为国家九五重点科研课题子课题“计算机与物理学课程整合”课题负责人，教育部全国中小学计算机教育研究中心（北京部）总课题组的核心成员，中国物理教育网教学研究部的首批成员，几年来在《物理通报》、《电化教育》、《中国电脑教育报》等国内报刊及 [HTTP://WWW.NRCCE.COM](http://www.nrcce.com)、[HTTP://WWW.K12.COM.CN](http://www.k12.com.cn)、[HTTP://WWW.EOL.EDU.CN](http://www.eol.edu.cn) 等国内著名网站上发表论文数十篇，多次获得国家、省市级论文一等奖，部分论文在实验通讯上连载，多次被同行引用，论文《结合创造教育，开展数理综合课教学》在教育部全国中小学计算机教育研究中心和中学数学教育专业委员会联合举办的第一届几何画板论文评选获得一等奖（物理方面唯一一篇获奖论文），同时获得学生活动组织特别奖。我校被教育部全国中小学计算机教育研究中心评为第一批优秀课题实验校，并颁发铜匾；课题《动态开放环境下的数理综合探究及创造力培养模式》于2000年九月获得由中国发明协会中小学创造教育分会组织的“中国中小学创造教育优秀科研成果”评选中荣获一等奖。公开课教学也取得好成绩，主要有《振动和波的再认识》获辽宁省首届创造教育擂台赛一等奖。《一组有关连杆机构的想象实验》在中国创造学会创造专业委员会组织的研究性学习解决方案擂台赛中被评为一等奖。通过“动态与创造”网站和国内外的同行建立了联系，并尝试了网上指导外地教师上公开课的个案。

九八年给市电教馆组织沈阳市中小学教师在东关小学进行培训。99年到辽宁省电教馆进行汇报交流。2000年五月向国家电教检查团汇报演示，获得好评；2000年八月在北京科技馆参加第六届亚太地区超常教育研讨会，作论文发言，受到与会代表的好评。并多次应邀去北京、青岛、保定、南京等地做过相关的研讨、讲座和协助培训。在全国范围内有一定的影响。为GSP的推广做出了贡献。

辅导学生的发明发现作品在国际国内获得大奖，填补了学校某些方面的空白。其中冯伟同学的《广义蝴蝶定理》获得学生发现特别奖；牟乔同学获得99新加坡国际中学生创意火化大赛“最佳创意奖”。

选修课上的学生制作的网站目标是“国内最大的GSP资源网”，连无锡的教师都通过这个网站下载使用我们的课件。



(三)中国少年的发现

选修课开展的过程中，最令人奋的是同学们的探索发现和创意火花。

在开展选修课的初始阶段，同学们对于GSP的使用大多局限于数学，特别是对一些函数图形的构造，而椭圆的构造自然成了热点，同学自然而然地想到了教材上的辅助圆法，得到的完整椭圆并没有使同学们得到满足。而有的学生想到了数学课上的一道题“圆上任意一点与圆内任意一点连线的中垂线和过圆上点的半径的交点的轨迹是椭圆”，于是同学们把它转移到GSP上，非常方便地构造出了平滑的椭圆，有的同学还把半径推广到了直线，并且平移圆内点到圆外，从而得到了双曲线。这样的构造几乎成了认识表现

GSP 的一个经典范例，为全国广大的师生所熟悉和应用。

选修课上有一个叫冯伟的学生，在他初中开始接触到蝴蝶定理的时候，就对这个奇妙的蝴蝶产生了浓厚的兴趣，并且对蝴蝶定理进行了猜想，可是当时的数学知识还不能帮助他准确验证，尽管多次利用圆规直尺仔细绘制测量，还是不能得到一个肯定的答案。当一开始接触到 GSP 的时候，它就把它和蝴蝶定理联系起来。首先他对以前的猜想通过 GSP 进行测算验证，结果令他非常失望，电脑显示的结果表明它的几年来一直深信的猜想是不正确的。他并没有灰心，而是在以前猜想的基础上借助 GSP 进行进一步猜想验证。在老师的鼓励下，在数学老师的建议下，他终于成功了，并且和其他同学一起还给出了相关的证明。我想中学生借助电脑的帮助对数学定理进行推广并有自己的发现，在当时的中国当属首次，在我的心目中一直把“广义蝴蝶定理”看作是中国的 GlAD 构造。当然，他的构造也获得了全国数学学会中学数学教育专业委员会的认可，并且和全国中小学计算机教育研究中心联合颁发给他“学生发现特别奖”的证书。

其实对于蝴蝶定理的研究，还有一个非常痴迷的同学，冯伟的学弟王小龙。他在“广义蝴蝶定理”的基础上，对蝴蝶定理进行了更深入的研究，给出了很多种推广，并且在这个过程中还有多个引理的发现，完成了相关论文《蝴蝶齐飞》，得到国内同行的认可。

王小龙对蝴蝶定理的系统深入的研究和取得的研究成果让很多同学敬慕，同时也树立起了一个非常好的榜样。很多同学纷纷效仿并选找自己的研究题目，深挖下去。同学们在三角形的研究、夹角平面镜成像等等很多方面的探索都取得突破并完成相关的论文。在这些探索研究的基础上，学校为他们出版了我校的第一本学生的作品集，这对同学们是一个莫大的鼓舞。

对于作为物理教师的我来说，印象最深的是学生给出的李萨如图几何构造，大学的时候初步接触到一点关于李萨如图的知识，当时只是通过示波器调出了几个非常有趣的图形，但自己并不是非常清晰。在接触到 GSP 之后自己也尝试着通过三角函数进行动态构造，效果不错，可是对于一般的同学来讲，似乎构造的过程相对有些抽象，学生并不是非常容易接受。后来一个叫金鑫的同学利用两个圆周运动在 X, Y 的投影给出了李萨如图几何构造，从而使到大学不一定能搞的清晰的概念，被一个中学生解决了。而后来的很多学生在这个基础上进行了更深入的研究。现代教育技术的帮助，可以使本来到的大学才能接触到的知识，在中学阶段也能学的非常清晰，我想现代信息技术的发展所带来的教育内容的更变不容回避。

... ..

(四)今后的几点设想

现代教育技术为创新教育注入了新的活力。但同时我们也看到计算机和网络也只不过是一种工具，它们不能使垃圾变成黄金，更多的关键具体工作还要靠人自身的创造性的劳动来实现。目前我的课程整合实验仅限于数学、物理和计算机。是学科综合的尝试和开端。

对于数理综合探究课的开展，今后的工作主要有以下几点设想：

如何进一步落实合作能力的培养。树立“己立立人，己达达人”---即“共赢”的新



的社会理念，是今后课题组的重要研究方向，是数理综合探究课的课程目标。

网上实践活动的开展。比如网上采访科学家，加强学生的检索能力，探索尝试一些创造性教学方法的设计…

加强社会实践。物理本身是实验科学，引导学生思考世界，体验自然，并不是生活在一个虚幻模拟的世界，我们最终还的回到实验。

今后主要构想是进一步深入基于电脑和网络的“动态、开放”的学习环境的研究，从学科综合的视角，以数理综合为突破口，实现学生的自主、协作、探究的学习，从而对学生的创新素质和实践能力进行培养。

七、学生的体会

数理综合探究课的开展不论在学习的内容还是学习的方式，都给同学们耳目一新的感觉，几个学期的尝试实践，取得了比较好的效果，在同学中引起非常强的反响，参加课程报名的同学一度严重超员，还有一些同学为此特地要求家长购买了电脑。下面摘录几个有代表性的学生体会。

… **数学也可以做实验** 谢辉

一次我解一道几何题，十分为难，左思右想不得其解。后来在数理综合课上，通过电脑的动态模拟让我一目了然，茅塞顿开，我第一次尝试到了用电脑的甜头。后来它带给我更多的便利，使我在解题中扩展了想象的空间，做出了许多巧妙的解法。提起实验，我往往想到物理化学，在综合课上，数学也可以做实验，在电脑提供的虚拟环境中进行试验，使原本枯燥的内容变得有趣，它激发了我的想象。图文并茂的加上富有创造性的 GSP 等小软件使我非常喜欢数理综合探究课。

… **我们要做学习的主人** 曹迪

科技的高速发展，电脑已经成为人们生活中不可缺少的一部分，电脑的高速运算能力在学习方面的优越性已经得到体现。以前我用电脑主要是用来玩游戏，后来我发现，有比玩游戏更有趣的事情，GSP 这个软件以前我听说过，可没想到还有这么简单好学的软件，而且运算非常精确，使原先觉得非常难于理解的东西，学得很轻松，并且对于所学的数学知识产生了兴趣。我和还特地从书店里买来了一本有关图形的图书，并尝试着画出了书中的图形，回到家里，用 GSP 去探索我喜欢的图形。没有想到世界上竟然有这么漂亮的几何图形。在邱老师的课堂上，我发现它还可以研究物理问题。各种精妙的想象，动态的演示深深地吸引着我。

我们的校长很有远见。给我们开设了这样一门课程，让我们自己参与研究学习，撰写论文，还可以上网发布交流推广。我们对此很感兴趣，同时也有很大的收获。学习不是被动的灌输，而是主动的探求，我们要做学习的主人！

… **有兴趣，就有动力** 王小龙

以前的学习常常是枯燥的，明明都是信息时代了，可是我们还常常面对着石头一样的黑板，读着一行行苍白的字，的确令人困倦。本学期我参加了数理综合探究选修课，它是我非常喜欢的一门课程，一学期的参与过程令我获益匪浅。我熟悉了电脑和网络，它们如同世界的窗口，让我看到的更加丰富多彩的世界。尤其是数学物理方面，计算机高速和精确的运算，多角度的功能，给我们的学习带来了极大的方便和无穷的乐趣。通过电脑和网络，把数学和物理问题有机结合起来，已知的可以得到证明，我们还可以探索连书本上也找不到的知识，我不仅仅会“鹦鹉学舌”，这让我证明了自己，感觉到

了自己存在的必要。兴趣是最优秀的教师，浓厚的兴趣给了我自信，使我有学习的动力。

… **它改变了我对学习的认识，我也能研究** 刘天意

在我的心目中，学习就是老师讲学生记，通过一些“照着葫芦画瓢”的题目进行练习，“研究”是教授、科学家们的专利。数理综合探究课改变了我对于学习的认识，在学习的过程中，我们学生也可以发现，也从事研究，我们也可以得到一些连老师都不会的、都没有见过的东西。探索、发现、创新是老师经常向我们渗透的观念，我也希望自己也能发现一个类似“广义蝴蝶定理”的什么定理，我有这个信心。

… **数学物理是一家，知识原来是有这么多的联系！** 吕国东

我的理科学的一直不理想，开始选这门课程主要的目的是加强一下自己的数学和物理知识，可是通过一个学期的学习，我发现以前我的一些认识是不对的，以前的学习数学就是数学，物理就是物理，他们的联系好像只在物理的计算题上。在老师的带领下，通过对一些题目的学习研究，比如我们研究了振动和波以及反射和折射等物理现象，发现我们的物理现象背后都有其数学的本质，而一些数学的模型往往也有一定的物理意义。数理综合课上的一些形象的范例使我对于数学物理的理解不再孤立，它提高了我的认识，我开始体会到知识是没有界限这句话的内涵了。

… **数理综合课提高了我的综合能力** 王思涵

在数理综合课上，通过对自己课题的研究一方面使我增长了一些课外知识，同时意识到自己知识得匮乏的紧迫感，提升了学习新知识的动力，另一方面，对于研究性学习的过程和方式大体上有所了解，参与研究性学习的过程培养了我的自学、探索、研究能力，综合的观点联系的观点看问题上提高了分析处理问题的综合能力。”

… **网络无限** 王寅林

在数理综合课上，借助电脑、网络，了解很多课堂上不知道的东西。以前认为 GSP 这个软件虽然很好，但这样的“小东东”一定没有几个人使用，通过网络，我发现其实有很多国家，很多地方的很多人都在使它，我还学会用网络查阅学习的资料，在网络的虚拟环境中，我们还结识了其他地区的老师和学生，结交网上学习的伙伴，互相交流，通过网络我还向一些眼下不了解 GSP 的人推荐它。通过其他网友的推荐，从网上下载了《仿真物理实验室》等小软件，使我们原来用 GSP 解决不了的问题变得简单了，我把它们推荐给老师和同学们，我向同学提供我的想法，同时也从同学那里学到了一些东西。网络使我们的课堂空间扩大了，使我们的眼界放宽了，更主要的是我们的思维更开放了。以后我会继续用新时代的气息去丰富我的学习生活。

… **撰写论文会带给我这么多的收获** 张伊藤

这是我们平生第一次自己自由选择学习内容，决定研究题目并第一次涉足研究。老师给了我们很大的自由度。兴趣调动了我们的积极性，使我投入全部热情和精力。

选择了论题后我就开始了正式的研究，我们分头在互联网及图书馆中查找资料。由于我的选题内容很宽，互联网的世界真精彩，有关文章相当多。在搜集资料的同时学到了不少课本以外的知识。从这繁杂的内容中理出一个清晰、系统的思路的过程使我们学会了分析处理信息，这提高了自己分析和综合应用的能力。

论文撰写过程中，对查阅到的新知识和小组研究成果进行了阐述，初步学会了撰写论文的重要步骤。我们还发现团结力量大，我的很多资料和一些想法是源于老师和其他小组同学的启发。而最后的成果也是我们小组齐心协力的结果。

在参与研究的过程中，也发现了自己的很多不足之处。比如对一些基本概念的理解不清楚，自己的知识面太狭窄，而且查阅收集信息资料的意识和能力不强。不过对于这些问题，我都会通过以后的学习逐渐加强。同时在论文的撰写的过程中，也发现自己的文学功底不够，时常无从下笔，我想这也对以后的我的语文学习提出要求。“圆锥曲线的构造”是我的第一篇论文，还被选入了学校的学生论文集，我想以后我会更加努力。

附：选修课推荐探究题目、具体内容等一览

面对电脑辅助教学，大多数人所关注的是电脑到底能解决什么问题，“提出问题比解决问题更重要”，能找到 GSP 适合解决的问题和解决这个问题具有同等重要的价值。以下是笔者几年来在选修课上和学生一起研究的一些具体问题，愿为同行提供借鉴。

□数学部分

q 知识点及相关问题

u 基本操作及数学基本概念

- u 作图
- u 变换
- u 度量

u 三角形相关

- ▲ 三角形的角平分线、中线和高三线
- ▲ 三角形三条边的关系
- ▲ 等腰三角形的性质
- ▲ 线段的垂直平分线
- ▲ 轴对称和轴对称图形
- ▲ 三角形内角和的验证及推广到多边形内角和问题的研究
- ▲ 三角形全等、相似
- ▲ 直角三角形性质 勾股定理
- ▲ 三线八角五心构造
- ▲ 三垂线定理
- ▲ 三角形与圆关系研究 内接三角形、外切三角形的构造
- ▲ 九点圆定理
- ▲ 三角形与五心相互位置关系

u 多边形相关

- ▲ 调和四边形
- ▲ 全等于相似的概念
- ▲ 平行四边形、矩形、正方形、菱形、梯形等四边形的构造和研究
- ▲ 平行线等分线段定理与三角形、梯形的中位线
- ▲ 特殊几何图形的构造
- ▲ 中心对称
- ▲ ...

u 圆相关

- ▲ 角度
- ▲ 旋转变换
- ▲ 弧长运算
- ▲ 垂径定理及其推论
- ▲ 圆心角、弧、弦、弦心距之间的关系
- ▲ 圆周角定理
- ▲ 直线和圆的位置关系
- ▲ 切线的性质
- ▲ 三角形的内切圆
- ▲ 切线长定理和弦切角定理
- ▲ 圆和圆的位置关系
- ▲ 两圆的公切线
- ▲ 正多边形和圆
- ▲ ...
- u 解析几何相关
 - ▲ 直线方程
 - ▲ 圆的方程
 - ▲ 圆锥曲线的方程
 - ▲ ...
- u 一般函数曲线相关
 - ▲ 二次函数图像 研究 $y = Ax^2 + Bx + C$ 曲线族
 - ▲ 幂函数、指数函数、对数函数图像
 - ▲ ...
- u 圆锥曲线相关
 - ▲ 椭圆构造方法
 - ▲ 椭圆中的定值
 - ▲ 椭圆与双曲线的统一
 - ▲ 椭圆规的构造
 - ▲ 圆锥曲线的几何光学性质及应用
 - ▲ 透镜成像和圆锥曲线的关系
 - ▲ 5点曲线
 - ▲ 求作圆锥曲线的有关几何元素
 - ▲ ...
- u 特殊曲线相关
 - ▲ 极坐标
 - ▲ 摆线 长(短)幅旋轮线 外摆线 内次摆线
 - ▲ 螺线 等速螺线 双曲螺线 阿基米德螺线 对数螺线 倒数螺线...
 - ▲ 蜗线等等
 - ▲ 心脏线
 - ▲ 玫瑰线 $\rho = a \sin n \theta$
 - ▲ 神奇曲线 $s = a + b \sin(m \theta / n)$
 - ▲ 中点轨迹 和特殊运动相结合
 - ▲ 垂足曲线

- ▲ 三角函数相关
- ▲ 三角函数的图像研究 $y=ASIN(BX+C)$ 曲线族
- ▲ 三角函数的几何意义 正弦线
- ▲ 诱导公式
- ▲ 三角函数与振动和波的解释
- ▲ ...
- u 复数相关
 - ▲ 目标向量平移
 - ▲ 向量运算
 - ▲ ...
- u 特殊构造相关
 - ▲ GlAD 构造
 - ▲ 蝴蝶定理及其推广
 - ▲ 周长佯谬
 - ▲ 于彬彬问题
 - ▲ ...
- u 立体几何相关
 - ▲ 投影 圆的投影是椭圆。
 - ▲ 立方体的旋转和摇摆
 - ▲ 柱体、台体的侧面展开
 - ▲ 祖暅原理
 - ▲ 多面体
 - ▲ 透视相关
 - ▲ 数列相关
 - ▲ 映射相关
 - ▲ ...
- u 著名数学问题和定理
 - ▲ 勾股定理 广义勾股定理
 - ▲ 黄金分割
 - ▲ 托勒密定理
 - ▲ 赛瓦定理
 - ▲ 欧拉线
 - ▲ 欧勒线
 - ▲ 费尔巴哈定理
 - ▲ ...
- u 其它
 - ▲ 三线和一的思想
 - ▲ 特殊曲线的几何同一
 - ▲ 利用脚本功能、递推功能，构造特殊图形，了解分形初步。
 - ▲ 幸运转盘
 - ▲ ...

□物理部分

q 知识点及相关问题

u 矢量运算相关

- ▲ 力的合成分解
- ▲ 渡船问题
- ▲ 拖船问题
- ▲ 功率恒定的汽车启动
- ▲ 向量运算专题
- ▲ ...

u 运动学相关

- ▲ 匀变速运动的演示研究
- ▲ 自由落体闪光照相
- ▲ 打点计时器纸带读数
- ▲ 加速度 a 变化的变速运动
- ▲ $v-t$ 图像的运用
- ▲ 变速追赶
- ▲ 抛体运动
- ▲ 飞机投弹演示
- ▲ 抛体的投影点的运动
- ▲ 有初速的匀变速曲线运动轨迹
- ▲ 牛顿炮弹
- ▲ 礼花爆炸演示研究
- ▲ 枪打松鼠
- ▲ 特殊运动的合成
- ▲ 三角形车轮与其路面形状及推广研究
- ▲ 奇妙的旋转专题
- ▲ ...

u 光学问题相关

- ▲ 视觉暂留现象的半定量研究
- ▲ 人与影子的运动关系
- ▲ 日食与月食的演示
- ▲ 月亮相对太阳运动轨道的研究
- ▲ 小孔成像
- ▲ 平面镜成像
- ▲ 平面镜中成像与物的大小比较
- ▲ 异想天开的题目：如果反射定律是反射角等于 n 倍的入射角，那么我们眼中的世界会是什么样？如果反射定律真的是这样，平面镜，球面镜成像的特点会很出乎我们的意料。
- ▲ 球面镜 焦点 成像
- ▲ 夹角平面镜改变光路的应用
- ▲ 夹角平面镜成像个数的讨论
- 折射与反射的几何画法
- ▲ 视深
- ▲ 全反射
- ▲ 三棱镜

- ▲ 薄透镜 球面相差
- ▲ 复合透镜消除球面相差
- ▲ 圆环的光学性质
- ▲ 透镜德第四条特殊光线
- ▲ 透镜与平面镜的组合 自准法测焦距
- ▲ 透镜成像的仿真与研究
- ▲ 近视眼与远视眼
- ▲ 投影仪、照相机、望远镜等光学仪器
- ▲ 透镜与圆锥曲线
- ▲ 薄膜干涉
- ▲ 双缝干涉
- ▲ ...
- u 振动和波相关
 - ▲ 简谐振动
 - ▲ 简谐振动的振动图像和波的图像
 - ▲ 弹簧振子车
 - ▲ 横波 纵波
 - ▲ 单摆
 - ▲ 单摆车
 - ▲ 李萨如图形
 - ▲ 纵波与横波比较
 - ▲ 声波
 - ▲ 水波
 - ▲ 波的叠加 驻波、拍
 - ▲ 一般的复合波
 - ▲ 相干波的演示
 - ▲ ...
- u 电学磁学相关
 - ▲ 电阻的串并联
 - ▲ 稳恒电流电路 闭合电路欧姆定律
 - ▲ 交流发电机
 - ▲ 电动机
 - ▲ 磁通量
 - ▲ α 离子散射实验
 - ▲ 螺旋加速器
 - ▲ 扫描原理
 - ▲ 带电粒子在电磁场中运动专题
 - ▲ 电磁振荡产生机理
 - ▲ 荧屏扫描
 - ▲ 扫描方波
 - ▲ ...
- u 机械装置设计相关
 - ▲ 从王莽卡尺到游标卡尺、螺旋测微器的构造
 - ▲ 滑轮的构造

- ▲ 验证牛顿第二定律
- ▲ 偏心轮
- ▲ 内燃机曲轴连杆机
- ▲ 连杆机构
- ▲ 自行车、爬墙者、运动者
- ▲ ...
- u 其它
 - ▲ 用 GSP 处理实验数据
 - ▲ 理想气态状态方程
 - ▲ 弹性碰撞
 - ▲ ...

振动和波的再认识

题目：《振动和波的再认识》说课人：东北育才超常教育部 邱发文

一：课题分析：

1、课题地位：

振动和波是横跨物理学不同领域的一种非常普遍的重要运动形式。它是声学，光学，电工学，无线电等技术部门的理论基础。大学物理中的核心课程量子力学又叫波动力学，研究振动和波的意义远远超过了力学的范畴。尽管在中学的要求较低，但仍不失为渗透高科技，培养创新和研究能力的一个好的素材。

2、学生素质水平：

针对超常班和特长班学生智力好，接受新事物快的特点。并在已经完成振动和波的常规教学且对圆的几何性质有了清晰的了解的基础上，根据常规教学的一些疑难疏漏问题和一些基础技术理论从数理综合的角度进行教学。

3、教学要求：

本堂课以振动和波的几何原理的视角，从“**匀速圆周运动的竖直投影为简谐振动**”入手并进一步展开，力图使学生对振动和波有一个更清晰的认识，并意识到数学对现象的描述具有阐明和加强的作用。

重点：简谐振动，横波和纵波的几何原理及动态理解

难点：水波的实质（目前的中学教学资料上还没有给出具体的阐释）

关键：振动和波的动态几何图景

4. 教学目标：

知识目标：对振动和波有一个清晰的物理图景并能深入理解其几何原理。

学法目标：使学生明确复杂物理现象背后的数学抽象。

能力目标：培养学生的观察力、分析综合力、类比迁移能力及创造能力。

德育目标：渗透任何复杂运动都是由简单运动组成的辩证唯物主义认识规律。

二：教学方法：

通向成功的路不止一条，本课通过电脑的动态仿真，通过电脑突出探索和再创造的过程，帮助学生建立动态的物理图景，培养创新意识。从物理现象的数学描述为入口，利用计算机与课程整合的思路：**教师提出问题，师生**

共同讨论和探索知识奥秘。

三：学法指导：

在“为创造而教”，“为迁移而教”原则的指导下，通过对课题的计算机动态模拟和辅助讲解，通过理想化的分析方法，使学生懂得：**学习任何知识的最好方法是你自己的探究！**

四：教学设计：

提出命题（引入新课--匀速圆周运动的竖直投影是简谐振动）通过对比弹簧振子车，理解振动图象的实质；牛顿时间观的电脑理解突破 A 、 ω 、 Φ 的物理内涵和决定振动图象的唯一性的教学难点；

由圆的对称性

→**拓宽命题**[→探索命题→应用命题]（探索-拓宽新知识）互相垂直振动叠加的实现；通过李萨如图对振动图象有更深层次的认识，同时渗透高科技知识；

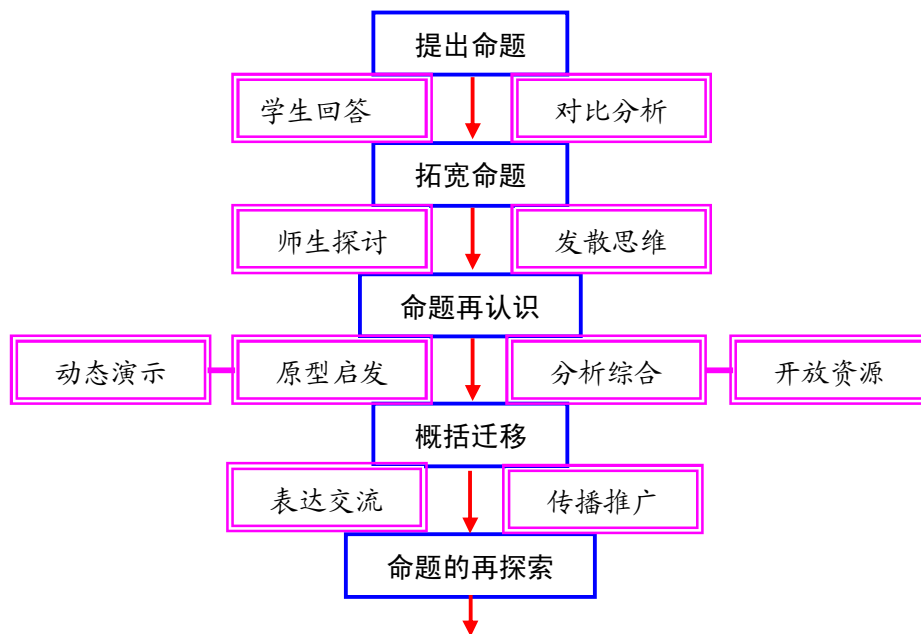
→**命题的再认识** 横波纵波的几何原理→波的图象的动态理解→水波的实质；

→**归纳总结** 利用理想化的分析方法，通过复杂物理现象背后的数学内涵，化抽象为动态仿真，说明物理现象的数学描述具有阐明和加强的作用

→**命题的再探索**...（布置新课题/课外作业）（通过课下的查阅和对应本课的还应有两堂单机练习课上对新课题进行探索/发现式研究）

整堂课力图使学生体验到一种“剧情在创造中展开，威力蕴藏在他的结果之中”的一种境界。

附：数理综合探究课（选修）的模式（图表）



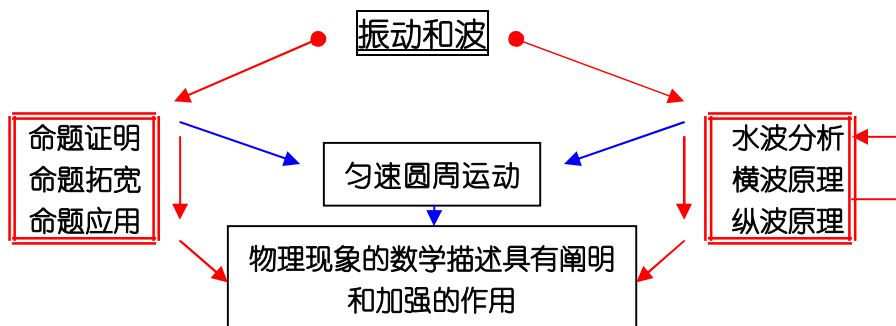
五：板书设计：鉴于本课的重点是使学生开拓视野，掌握一种新思路，而不是对具体概念的记忆，结合 powerpoint 方便快捷的特点，一改以前的板书形象，而采用电脑字幕的形式，清晰、直观、动感。

六：巩固练习：李萨如图的研究；横波、纵波的多种构造方法；水波构造的尝试。

对于上述的三道题目，学生可以任选一道自己感兴趣的，并在以后的上机课中自己探索研究，并可以利用课外时间查阅有关资料，拓宽自己的课题，还可以以小论文的形式总结。这在某种程度上可以称为专题研究。

七：整体框架：

本课从“数理综合”的视角，从振动和波的几何内涵入手，建立在圆周运动的数学基础上逐步展开的。



后记：布鲁纳认为，我们的学校过去以过分困难为理由，把许多重要的学科教学推迟。他主张向学生提供挑战性但是合适的机会使其发展步步向前。他提出一个非常著名的命题：“任何学科的基础都可以用某种形式教给任何年龄的任何人”。这可以引导智慧发展。尽管有过激之嫌，但同时也给我们提供某种启示。本课的内容是自己根据 GSP 的自身特点和《振动和波》的教学难点而选取的，有些内容连大学生可能都不清楚。而通过现代化的教学手段，从现象的数学描述入手，完全可以被中学生所接受。现在教育上普遍强调要把以传授知识为主的再现型教育转变为发展智力和培养能力的发现型教育。对创造教育我的理解是如何让学生体验到科学的和谐美，激发创造的兴趣，从课堂上学到创造的方法，而不是奢望学生在课堂上能创造出什么。**真正的创造是在课堂以外。**本堂课正是渗透着这样的一种观点。和本堂课相对应还应该至少两课时的单机练习，我想学生的真正创造是在他们探索的过程中。

以上陈述，无论从内容还是形式上，很大程度上有杜撰之嫌，定有很多不当之处，还请多多指正。

谢谢！

1998 年 11 月 1 日星期日 于科技楼

广义蝴蝶定理

东北育才学校 冯伟 指导教师 邱发文

自从学习几何画板以来，我一直在思索着这样一个问题：怎么才能把“蝴蝶定理”推广一下。

我想，能不能把“蝴蝶定理”中的圆由一个变为两个，相应的，还保持一种美妙的性质呢？如图 I，是“蝴蝶定理”，有结论 $EP=PF$ ；如图 II，是“蝴蝶定理”的演变，点 P, Q, R, S 是否也存在某种关系呢？

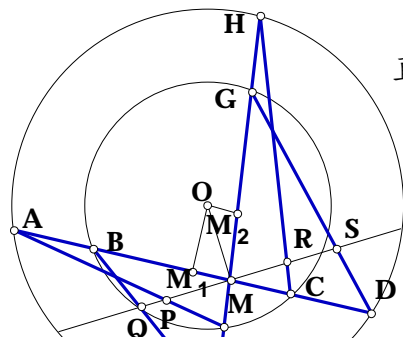
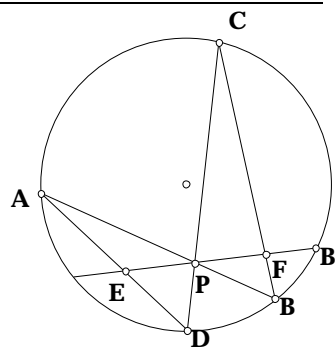
我在课下做了一个比较精确的图，并进行了测量，进而提出了猜测： $QM \cdot PM = MS \cdot MR$ ，或者 $QM + PM = MS + MR$ 。我又做了几个图进行检验，结果误差都比较小。上机时，利用几何画板做了一个动画，发现误差变化范围很大。我就开始怀疑这个结论。但是我并不死心。我又进行了测算，终于发现等式：

$$\frac{QM \cdot PM}{QM + PM} = \frac{MS \cdot MR}{MS + MR} \text{ 成立, 其误差在千分位之后.}$$

而后给出了一个数学上的证明。

这件事使我感觉到几何画板有以下几个妙处：比手工做图方便、精确、直观、连续。

如图 1，取圆 O 内一条弦的中点 P，过 P 点作 AB、CD 交圆于 A、B、C、D 点，连 AD、BC 交弦于 E、F 点，则 EP=PF。这就是著名的“蝴蝶定理”。



题目：过圆心 O 的两个同心圆内弦中点 M 作两条直线交圆于 A、B、C、D、E、F、G、H，连 AF、BE、CH、DG 分别交弦于点 P、Q、R、S，则有等

$$\frac{1}{QM} + \frac{1}{PM} = \frac{1}{MR} + \frac{1}{MS} \text{ 成立. 这就是蝴蝶定理的推广.}$$

证明：引理，如右图，有结论

$$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{AM} = \frac{\sin \beta}{AB} + \frac{\sin \alpha}{AC}$$

由 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABM} + S_{\triangle ACM}$ 及正弦定理即可得到：

$$\text{原结论 } \frac{1}{QM} + \frac{1}{PM} = \frac{1}{MR} + \frac{1}{MS}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin(\alpha + \beta)}{QM} + \frac{\sin(\alpha + \beta)}{PM} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{MR} + \frac{\sin(\alpha + \beta)}{MS}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin \alpha}{MA} + \frac{\sin \beta}{MF} + \frac{\sin \alpha}{MB} + \frac{\sin \beta}{ME} = \frac{\sin \alpha}{MC} + \frac{\sin \beta}{MH} + \frac{\sin \alpha}{MD} + \frac{\sin \beta}{MG}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{MD} - \frac{1}{MA}\right) \sin \alpha - \left(\frac{1}{ME} - \frac{1}{MH}\right) \sin \beta = \left(\frac{1}{MC} - \frac{1}{MB}\right) \sin \alpha - \left(\frac{1}{MF} - \frac{1}{MG}\right) \sin \beta$$

作 $OM_1 \perp AD$ 于 M_1 ， $OM_2 \perp EH$ 于 M_2 ，

$$\text{于是, } MA - MD = MB - MC = 2MM_1 = 2M \sin \beta;$$

$$MH - ME = MG - MF = 2MM_2 = 2M \sin \alpha$$

且 $MA \cdot MD = ME \cdot MH$ ， $MB \cdot MC = MF \cdot MG$ ，代入上式，又

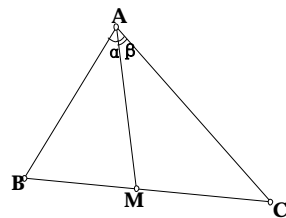
$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{OM}{MA \cdot MD} - \frac{OM}{ME \cdot MH}\right) \sin \alpha \sin \beta = 2\left(\frac{OM}{MB \cdot MC} - \frac{OM}{MF \cdot MG}\right) \sin \alpha \sin \beta$$

$$\Leftrightarrow 0 = 0$$

故原式成立

证毕。

教师后记：冯伟同学关于“广义蝴蝶定理”的认识是在自己数学知识的基础上，借助于 GSP 相对独立完成的。抛开广义蝴蝶定理自身的意义不论，单凭



其处理问题的过程：推测、猜想、验证、推广、论证，这不能不说是为中学数学教育留下某种思考，对中学生创造力的培养提供某种借鉴。

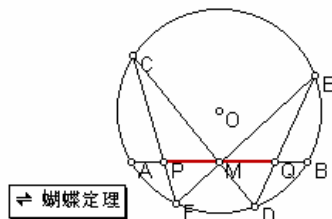
“蝴蝶”齐飞

东北育才学校 王晓龙 指导教师 邱发文

一. 第一只蝴蝶

1815年在西欧的一本通俗杂志《男士日记》上，有一个征求证明的几何问题。题目是：过一圆的AB弦中点M引任意两弦CD和EF，连结CF和ED，交AB弦于P,Q两点，则有：PM=PQ（图一）。

$$\text{距离}(P \text{ 到 } M) - \text{距离}(M \text{ 到 } Q) = -0P00 \text{ cm}$$



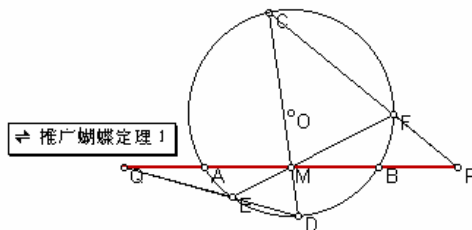
题目的圆形酷似一只蝴蝶，因此被后人称为“蝴蝶定理”。

二. 飞翔的 Butterfly

“蝴蝶定理”的内容要求CF与ED与弦AB有交点，这就限制了弦CD与EF的范围，为了让“蝴蝶定理”再放光彩，两个简单的推论产生了：

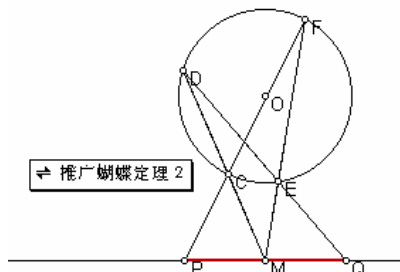
定理1：过圆的AB弦中点M，引任意两条弦CD和EF，直线CF与ED与直线AB交于P，Q两点，则有：MP=MQ（图二）。

$$\text{距离}(P \text{ 到 } M) - \text{距离}(M \text{ 到 } Q) = -0P00 \text{ cm}$$



定理2：l为圆O外一条直线，OM垂直l于M，过M引圆的任两条割线MCO与MEF，直线CF和ED与直线l交于P,Q两点则有：MP=MQ（图三）。

$$\text{距离}(P \text{ 到 } M) - \text{距离}(M \text{ 到 } Q) = 0P00 \text{ cm}$$

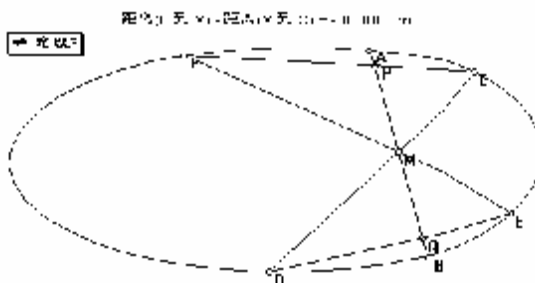


这两个推论解除了“蝴蝶”身上的枷锁，使蝴蝶真正地飞上了天空。

三. 奇妙的“变种”

随着知识的增多，了解了椭圆的我们又对其产生了浓厚的兴趣。数学爱好者总是追逐着命题的变化与延伸。椭圆与圆的联系不可谓不紧密，于是我开始有了进军椭圆的想法。令人高兴的是，“蝴蝶定理”在椭圆中仍然成立。

定理 3: 过椭圆的 AB 弦中点，作任两弦 CD 和 EF，直线 CF 和 ED 交直线 AB 于 P, Q 两点，则有：PM=MQ (图四)。



这奇妙的蝴蝶在椭圆中安家落户了，好像是一只精心培育的变种蝴蝶，万分妩媚。

在高兴的同时，我还想到了其它一些东西，圆与椭圆本质上是一种二次曲线，而是不是二次曲线都有类似性质呢？经过反复验证，我得到了以下定理：

定理 4: 在二次曲线 c 中，过弦 AB 中点 M 任作两条弦 CD 和 EF，直线 CF 与 ED 交直线 AB 于 P, Q，则有：PM=MQ

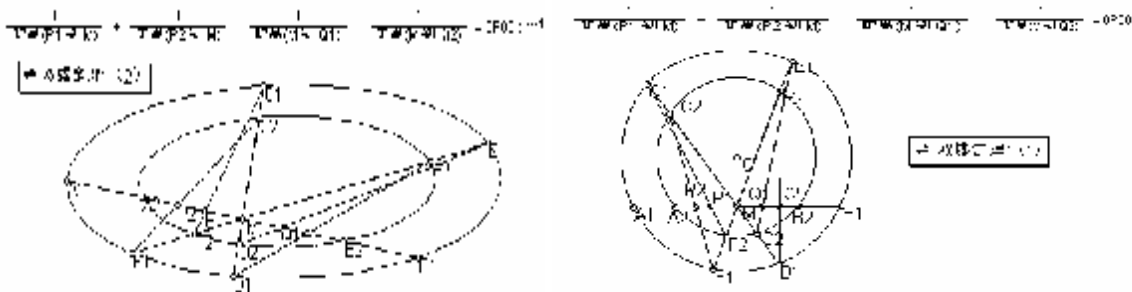
于是，这只变种蝴蝶又找到两个漂亮的胞妹，与它一起飞翔。

四. 双蝶齐飞

在老师的推荐下，偶尔看了本校同学写作的一篇小议论文，讨论了双圆蝴蝶定理，我受这一推论的影响，又推出了几个美妙的结论，被我称为“双蝶定理”。

双蝶定理 1: 对于有心曲线说，如果 c_1 与 c_2 关于中心位似，则任作一条 l 交 c_1, c_2 于 A_1, B_1, A_2, B_2 四点，过 A_1, B_1 中点 M 作 l_1, l_2 分别交 c_1, c_2 于 $C_1, D_1, C_2, D_2, E_1, F_1, E_2, F_2$ ，直线 $C_1F_2, C_2F_1, E_1D_2, E_2D_1$ 分别交 l 于 P_1, P_2, Q_1, Q_2 ，

求证： $\frac{1}{P_1M} + \frac{1}{P_2M} = \frac{1}{MQ_1} + \frac{1}{MQ_2}$ (图 5, 6)。

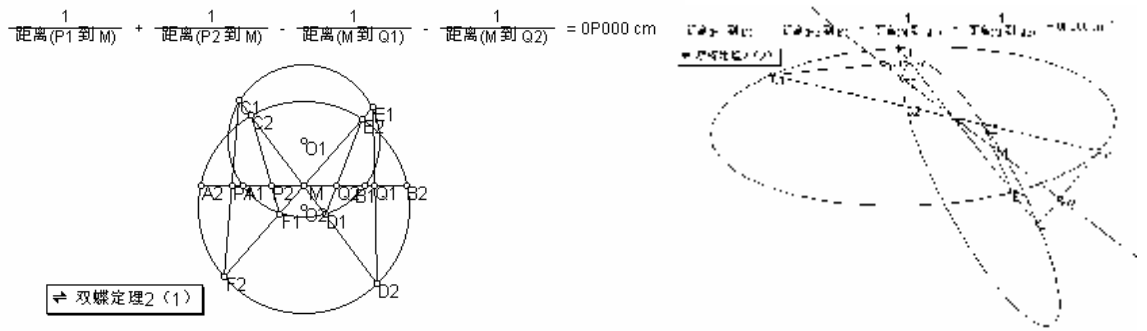


无意中发现当两圆圆心不重合时也有类似的结论，于是再进一步，又有一

只 Butterfly 诞生了.

双蝶定理 2: 如果 l 交二次曲线 C_1C_2 于 $A_1B_1A_2B_2$ 中点且 A_1B_1 与 A_2B_2 中点重合于一点设为 M , 过 M 作 l_1l_2 交 C_1C_2 于 $C_1C_2C_2D_2E_1F_1E_2F_2$ 八点, 直线

$$C_1F_2C_2F_1E_1D_2E_2D_1$$
 交 l 于 $P_1P_2Q_1Q_2$ 四点, 则有 $\frac{1}{P_1M} + \frac{1}{P_2M} = \frac{1}{MQ_1} + \frac{1}{MQ_2}$ (图



7, 8)

(只在图中各点在如图位置时定理成立)

双碟一同飞舞, 真是美丽无比。

五. 更深的探索

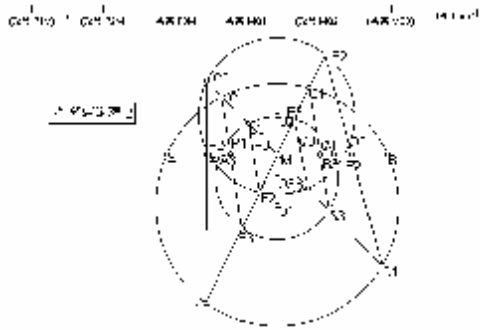
面对着多姿多彩的蝴蝶, 我们不禁陶醉于其中了, 但是对蝴蝶定理的探索还远远没有结束。勤劳的人们是决不会停步不行的。

冯伟的论文中已经把蝴蝶中的一个圆变成了两个圆, 我又好奇地开始了更远的探索, 结果是令人欣慰的。



多蝶定理 1: 对于 n 个同心圆, 有类似“双蝶定理”的结论 (图 9, $n=3$ 时)

多蝶定理 2: 对于 n 个圆心共线的同心圆有类似“双蝶定理”的结论 (图 10, $n=3$ 时)



(只在图中各点在如图位置时定理成立)

蝴蝶家族的越来越多了，真可为称为万蝶齐飞，艳丽无比。

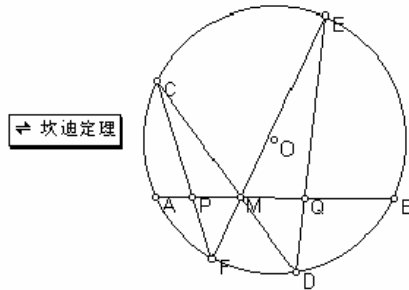
六. 蝴蝶皇后

蝴蝶仍被身上的几条丝带捆在“中点”的条件上，但数学爱好者却解开了这几条丝带，使蝴蝶的姿态更加美丽。

坎迪定理：过圆的弦 AB 上任意一点 M 作任两条圆的弦 CD 与 EF，直线 CF

与 ED 交直线 AB 于 P, Q 两点，则有 $\frac{1}{PM} - \frac{1}{MQ} = \frac{1}{AM} - \frac{1}{MB}$ (图13)

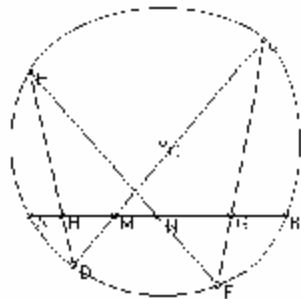
$$\left(\frac{1}{\text{距离}(A, P, M)} - \frac{1}{\text{距离}(M, Q, B)} \right) - \left(\frac{1}{\text{距离}(P, M, A)} - \frac{1}{\text{距离}(M, Q, B)} \right) = 0 \text{ PDD cm}^{-1}$$



坎迪定理虽然摆脱了中点条件的约束，但是三线交于一点的条件仍然使六个点的位置互相制约，经过尝试，我发现了一个更为普遍的定理，被我称为“蝶后定理”。

蝶后定理 1: AB, CD, EF 为圆的三条两两相交的弦，CD, EF 交 AB 于 N, M, CF, ED 交 AB 于 P, Q, 则有：

$$\left(\frac{1}{AM} - \frac{1}{NB} \right) \left(\frac{1}{AN} - \frac{1}{MB} \right) = \left(\frac{1}{PM} - \frac{1}{NB} \right) \left(\frac{1}{PN} - \frac{1}{MB} \right) \quad (\text{图14})$$



既然已有“椭蝶”的存在，我又把眼睛盯在了二次曲线上。由于这次的六个点是任意的，所以我从帕斯卡六边形定理中得到了启发，推出了一个极为普通的定理：

蝶后定理 2: 六边形 ACEBDF 是一个帕斯卡六边形，CD, EF 交 AB 于 N, M, CF, ED 交 AB 于 P, Q, 则有

$$\left(\frac{1}{AM} - \frac{1}{NB}\right) \left(\frac{1}{AN} - \frac{1}{MB}\right) = \left(\frac{1}{PM} - \frac{1}{NQ}\right) \left(\frac{1}{PN} - \frac{1}{MQ}\right) \quad (\text{图15}) \quad \text{于}$$

是，就把任意二次曲线上的任意六点蝴蝶定理推出来了。

七. 尾声

蝴蝶定理这一古老的命题，已经繁衍出了一系列结论，成为一个庞大的蝴蝶家族。而对其的探索并没有结束，蝴蝶王国的奥秘仅仅揭去了第一层面纱，更多的 Butterfly 一定会飞上数学的天空，为这古老而又闪光的家族再添上一道美丽的光环。

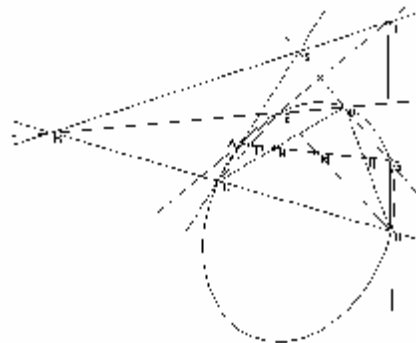
王晓龙

99. 3. 13 第二

稿

参考文献：

1. 《几何画板实验通讯》 《广义蝴蝶定理》 冯伟
2. 《中学生数学》89年 《蝴蝶定理史话》 徐品方



qiusir lab qiusir.com 2002/12/1