

动态数理微课程(I)

姜平 邱发文

2015 年 7 月 25 日

目录

第1节 软件入门	2
1.1 常见功能	2
1.2 拓展作业	5
第2节 梯子问题-轨迹构造	6
2.1 任务描述	6
2.2 技术支持	6
2.3 具体做法	7
2.4 拓展作业	8

第1节 软件入门

1.1 常见功能

我们这个课程主要是依托几何画板为基础,对一些数理综合问题做些简单的探索.那么我们首先得对这个软件有一定的了解.

这个软件其实非常好上手,可以参考好多现有的教程,甚至可以直接尝试做一些问题,边用边学.我们简单的做一些介绍.

打开一个几何画板文件,左边有一列操作按钮,其中一部分是构造功能的,直接选中工具就可以做出点,圆,线,多边形.这里都是常用的构造,其他的构造功能可以通过构造菜单中的选项实现,画板中一般都符合先选择构造对象再进行构造的顺序.我们比如我们要构造一个线段的中点,那么我们可以选中一条线段,然后选择构造,中点,就可以得到中点.其实用的熟练的话我们可以利用快捷键和程序的默认效果来解决一些问题.

比如我们要解决一个任意对边形每次取中点构造出另一个多边形,反复循环下去的效果我们就可以这样操作.

作法

- 1.我们用选择多边形的工具(只要边的那种,长按多边形工具选择第三个.)给出一个多边形,最后一个点双击.
- 2.在操作刚刚完成的时候,边是在选中状态,我们用快捷键Ctrl + M就产生了各边的中点.继续用快捷键Ctrl + L就产生了一个新的多边形,也就是中点多边形.
- 3.反复下去,很快就得到了这个中点多边形.

关于这个多边形Qiusir曾经发表过一个描述.

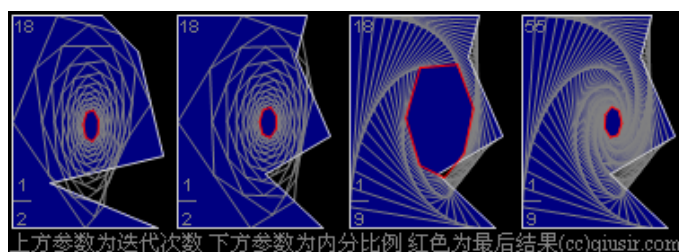


图 1.1: 求师得博客截图

多边形的任意性对应初始条件的大差异,而经过多次迭代后的结果却是趋同的,如同人的先天差异可以通过后天努力弥补一样.教育过程中的重复过程不仅不可缺少,其导致不同初始条件的趋同也是必然了.而内分比例的不同如同三百六十行行行出状元,不过这里有为成功付出代价不同的区别.”上帝”表面上有所偏心地给了不同人不同的外在,却悄悄地赋予每个人相同的努力结果.而生活中的确经常可以看到不同的人有类似成功的现象.看来人的差距并不在于初始的差异,外表的差异大多是暂时的.而最后结果的不同更多取决于中间过程的”迭代”次数,这也是”初衷不改”的耐力了.或许还可以得到这样的启发,眼下所强调的”个性发展”并不是追求表面的炯同,而是鼓励自我的”不懈迭代”,再大的个性差异的”真正发展”的结果同样是趋同的,所谓”条条大路通罗马”.实现成功的方法各异,而所追求的结果最终相同;成功道路的远近是表面的,关键要选择一条能够坚持下去的道路,而长途跋涉仅仅需要毅力是不够的,还需乐趣相伴.而前进的”迭代过程”一方面提醒”坚持才能改变”,同时也告诫要把持”改变才能不变”的尺度.

从这个例子我们可以看出来,操作技巧是只是一个侧面,另一面要积累经验.

除了构造对象之外,我们最常用的还有变换菜单,变换中用到一个操作技巧就是双击,比如要将A点以B点为中心放缩 $\frac{1}{2}$,我们可以双击B点,选择A点,从菜单中选择缩放,就会弹出对话框,然后输入 $\frac{1}{2}$,确定即可.这个标记的过程就可以通过双击实现.

还有常用的属性,往往通过右键就能够解决.比如新建参数,坐标系,更改坐标系的表格都可以从右键菜单中得到.

当然更多的操作还是依赖菜单来解决,度量菜单中往往能解决一些长度,角度的度量.比例的计算等等.这些操作凭经验就可以解决,不过也要注意操作顺序,比如度量角的时候,我们依次点选A, B, C度量出来就得到角度 $\angle ABC$,点选C, B, A就会得到角度 $\angle CBA$,这两个度数相同,但是如果我们选择右键,参数选项,单位选项卡中的方向度,就发现这两个度数变成了相反数.应用的时候就要注意区别.

还有其他例子,比如给出一条直线A, B和其上一点C,我们依次点选A, B, C,用度量,比的工具就会得到 $\frac{AC}{AB}$.是不是和你想的不一样啊!很多人会以为是 $\frac{AC}{CB}$ 或者别的组合吧,所以还要细心啊!

我们再来看看另外两个常用的菜单,数据菜单和绘图菜单.

数据菜单中,主要有新建参数,新建函数,制表和定义导函数的功能,其中新建参数或者新建函数都是比较容易的.关于制表其实相当于抽样侦测,我们通过一个例子进行说明.

作法

- 1.绘制一个点 A ,右键单击这个点,给出横纵坐标.
- 2.此时由于坐标的给出,连带会自然产生坐标系和网格,隐藏网格.
- 3.点选 x_A, y_A ,利用数据菜单制表.
- 4.点选表格,利用菜单添加数据(或者使用右键).弹出的对话框中我们能看到两个选项,一个是添加一个新条目,另一个是当数值改变时添加,其中还给出参数可以改变添加数目和添加的间隔时间,我们选择第二种方式.
- 5.选择之后我们用鼠标移动点,每隔一秒就会记录一个位置的坐标,自动的添加到了表格中.
- 6.记录完成后,可以使用绘制表格中的点来把表格中的数据都给作出来.绘制出来的点和表格已经脱离关联关系了,此时删除表格,点依然存在,这其实是一个损失,在很多类似软件中,这个都是关联的. ■

导函数功能也很强大,我们给出一个函数,直接就可以得出相应的导函数,甚至包含一些比较奇怪的函数也可以我就试过 $f(x) = x^x$ 等等.大家可以自己体验一下.

还有一个功能叫定义绘图函数.这是一个很神奇的功能.

作法

- 1.首先在工具栏中选取标记工具,随意在画板中绘制一条曲线,这应该是一个图片形式.
- 2.点选图片,利用数据菜单定义绘图函数,会出现一个函数 $f(x)$:绘图1
- 3.选择这个函数,绘制图象,我们发现得到了一个函数图象基本和绘制的图片重合,只是更加的光滑.
- 4.缩放原图片或改变原图片的位置,函数也随之发生变化. ■

我们发现其实这个功能已经把刚刚我们绘制的图象转化成了一个函数.当然我们绘制的一定是一个函数才可以,比如我们绘制一个圆(当然很难画圆,象征一下就行),重复刚才的操作,就会发现不同.

Gsp v5.0发布的时候就用这个功能作了一个演示,绘制一条曲线,然后函数化,然后计算其积分.效果还是很震撼的啊!

绘图菜单中我们重点说定义坐标系和标记坐标系.

作法

- 1.右键建立坐标系.
- 2.在平面内给出一个点 A ,点选 A ,利用绘图菜单,定义原点,这时会出现提示框,说您已经有一个坐标系,是否还构建一个坐标系,点击确定.
- 3.在这个坐标系内绘制一个函数 $f(x) = x^2$ 图象.
- 4.点选原坐标系的原点,通过绘图菜单标记坐标系,这样切换回原来的坐标系.在这个坐标系中绘制 $f(x) = x^2$ 的图象. ■

这些功能如果利用巧妙的话都能构造非常精彩的效果.例如用这个实现图象的平移变换就很容易.完全可以自己体会一下.其实众多的软件中,几何画板的流行程度是在中学 教师层中是最为广泛的,主要是操作便捷容易入手.所以大家要大胆尝试,边用边学,应该很快无师自通的.

1.2 拓展作业

- 1.制作一个三角形内角和是 180° 的课件.
- 2.制作一个验证梅涅劳斯定理的课件.
- 3.尝试利用两种方法画出 $f(x) = x^2 - 2x + 3(x \in [-1, 3])$ 的图象以及其导函数的图象.
- 4.制作一个由 $f(x) = x^2$ 平移变换到 $f(x) = (x - a)^2$ 的效果.

第2节 梯子问题-轨迹构造

2.1 任务描述

所谓梯子问题,是一个著名的轨迹假想实验,我们想象一个靠墙而立的梯子(一端靠在墙上,一端支在地上),这个梯子某橈上挂着一个油漆桶,当梯子顺墙滑落的时候,油漆桶的轨迹?

2.2 技术支持

这个问题主要是依赖轨迹的构造,这只要同时选中控制轨迹运动的自由点和要构造轨迹的点,然后点选构造轨迹就可以了.

如何去让一个梯子顺墙滑倒呢?

首先我们把这个问题转化为数学描述:已知一条线段 AB , A 在 x 轴正半轴上运动, B 在 y 轴正半轴上运动.且保证线段 AB 的长度为 d (定值).那么这个问题似乎并不困难.首先作出 x,y 轴正半轴两条射线,作出 x 轴上的自由点 A 点,给定一条线段 MN ,其长度为 d ,然后以 A 为圆心, MN 为半径画圆与 y 轴正半轴的交点即为 B .如图2.1 接下来就只要作出中点,构造轨迹就可以了!

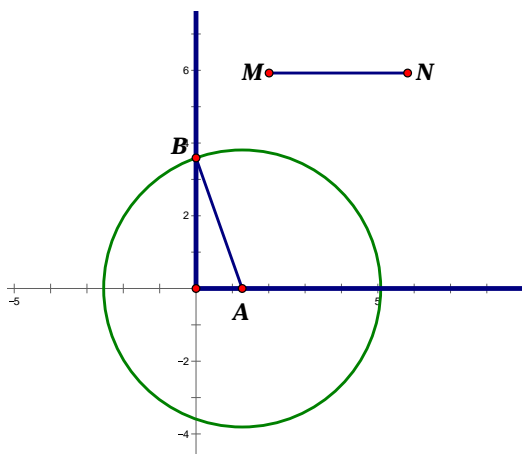


图 2.1: 梯子问题

这只是简单的实现了梯子问题,即没有推广,也不够智慧.后来又聪明学生解决了这个问题.把这个梯子“解放”到坐标系所有象限中,而且也不用硬性的交点来保证定长了.

2.3 具体做法

作法

- 1.新建一个画板文件,右键方形网格给出坐标系.
- 2.在坐标系中以原点 O 为圆心画出一个圆.并在其上任取一个点 A .连接 AO 并取中点 B .
- 3.过 B 作 y 轴的平行线 l ,将线段 OA 关于 l 对称.这样就很快就得到一个靠在坐标系中的梯子.
- 4.标记中点,构造轨迹即可.如图2.2

这里主要运用了一个几何性质就轻松的完成了这个工作.将知识与技术完美的融合为一体了.其实完成了这个工作,探索还远远没有完成.

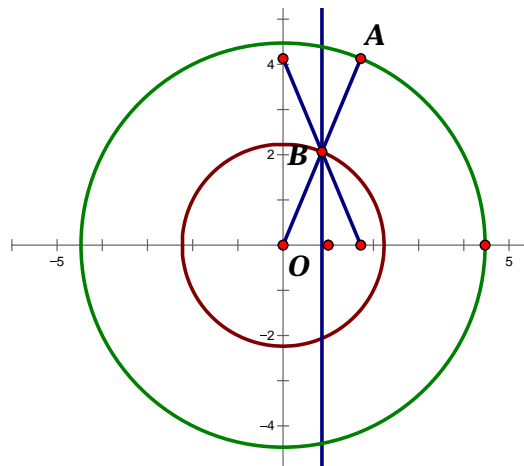


图 2.2: 梯子问题

比如我们可以把中点推广到任意一点,我们可以利用刚才的结果.

作法

- 1.新建一个画板文件,右键方形网格给出坐标系.
- 2.在坐标系中以原点 O 为圆心画出一个圆.并在其上任取一个点 A .连接 AO 并取中点 B .
- 3.过 B 作 y 轴的平行线 l ,将线段 OA 关于 l 对称.这样就很快就得到一个靠在坐标系中的梯子.
- 4.隐藏多余的点和线,只留下点 A 和"梯子".用点工具在"梯子"上任取一个点 C ,这样就得到了梯子上任意一点.

5.构造这个 C 点关于 A 的轨迹.得到一个椭圆.尝试拖动 C 点,会发现这个轨迹随之发生变化. ■

我们还可以做很多的研究,比如处于好奇,我们不去做那个点的轨迹,而是作出线段的轨迹,这样就形成了一个包络,如图2.3.或者我们把梯子和 A 点形成的三角形 $A'O'A$ 的重心.追踪这个重心的轨迹就居然得到一个圆,如图2.4.这个几何性质是不是很神奇!我们还可以继续这个研究,看你还能有什么发现.

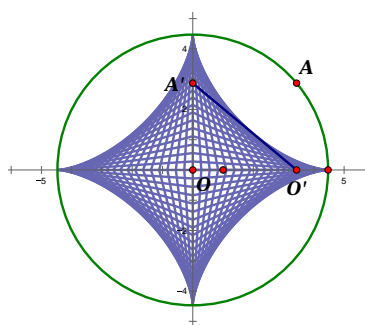


图 2.3: 梯子包络

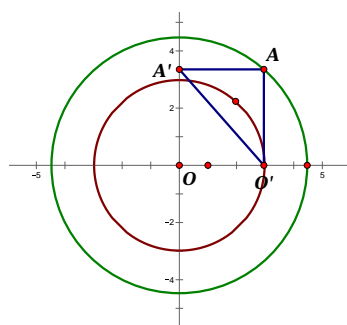


图 2.4: 重心轨迹

2.4 拓展作业

1.梯子问题中的三角形 $A'O'A$ 的垂心,外心,内心构造出来,并且描绘其轨迹.

2.将坐标轴换为两条相交直线(非直角坐标),利用梯子问题的做法(依然按照垂直时构造,只这时的梯子端点不一定保证在两条直线上了),观察轨迹的变化情况.

3.将这个定长线段问题推广到圆锥曲线上的定长线段中点轨迹问题.

索引

操作

 轨迹, 6

名词

 包络, 8